С.К. Кожухов

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов математических специальностей педагогических вузов, абитуриентов

ОРЕЛ – 2013

Кожухов С.К.

Уравнения и неравенства с параметром. – Орел, 2013

В пособии систематизирован опыт работы автора по изучению темы "Уравнения и неравенства с параметром" в классах физико-математического профиля. Оно содержит большое число разобранных примеров, к каждой теме предлагаются упражнения для самостоятельного решения. Данное пособие можно использовать при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике.

Книга адресована учителям математики, студентам математических специальностей педагогических вузов, выпускникам средних учебных заведений.

Предисловие

Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. Это связано с тем, что в школе стараются развить умения и навыки решения определенного набора стандартных задач, связанных часто с техникой алгебраических преобразований. Задачи с параметром относятся к другому типу. Для их решения обычно требуются гибкость мышления, логика в рассуждениях, умение хорошо и полно анализировать ситуацию.

Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметром, успешно справляются и с другими задачами. Именно поэтому задачи с параметром обладают диагностической и прогностической ценностью.

На протяжении ряда лет многие вузы включают уравнение (неравенство) с параметром в задания вступительных экзаменов (олимпиад). Но до сих пор задача с параметром остается самой "неудобной" для абитуриентов. Более того, в последние годы задачи с параметром регулярно встречаются в вариантах ГИА и ЕГЭ. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно.

Автор надеется, что предлагаемое пособие поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений и неравенств с параметром, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях (элективных курсах).

Введение

Параметр (от греческого “parametron” – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

С использованием параметров проводятся исследования многих систем и процессов реальной жизни. В частности, в физике в качестве параметров могут выступать температура, время и др. В математике параметры вводятся для обозначения некоторой совокупности объектов. Так, уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ с параметрами a, b и c определяет совокупность всех окружностей; уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ – всех единичных окружностей; уравнение $x^2 + y^2 = c^2$ – совокупность концентрических окружностей с центром в начале координат.

Рассмотрим с точки зрения алгебры, как определяется уравнение (неравенство) с параметром.

Пусть P(x; a) (I) – предложение с двумя переменными, где $x \in R$ и $a \in R$. Если переменным x и a придать числовые значения x_i , a_i из множества R, то может получиться:

- запись, лишенная смысла (Например, в уравнении $\frac{x}{a} = 3$ при x=3, a=0),
- ложное высказывание (Например, в уравнении $\frac{x}{a} = 3$ при x=3, a=-1),
- истинное высказывание (Например, в уравнении $\frac{x}{a} = 3$ при x=3, a=1).

Множество всех (x_i , a_i), при которых имеем 2-й или 3-й случай называется областью допустимых значений переменных (ОДЗ).

Множество всех (x_i , a_i), при которых имеем 3-й случай называется областью истинности (ОИ) данного высказывания.

Если в высказывании (I) переменной a придать какое-либо значение a_i из ОДЗ, то (I) станет предложением с одной переменной: P(x) (II), которое имеет свою ОДЗ и ОИ.

Таким образом, для любого a_i из ОДЗ можно рассматривать предложение с переменной P(x) и находить его ОИ. В этом случае предложение P(x; a) называется предложением с одной переменной (x) и параметром (a).

Замечания.

1) В качестве предложений с переменной и параметром в школьном курсе чаще всего рассматриваются уравнения, неравенства и их системы.
2) Такой алгебраический подход позволяет определить уравнения (неравенства) не только с одним, но и с любым конечным числом параметров.
3) В некоторых школьных учебниках и пособиях для абитуриентов уравнение (неравенство) с параметром определяется более примитивно: «Это уравнение (неравенство), в запись которого, кроме неизвестных, входят числа, обозначенные буквами».
4) В школьном курсе математики чаще всего решаются задачи с одним параметром (реже с двумя или тремя).
5) В задачах с параметром переменные обозначаются, как правило, x, y, z, t, а параметры a, b, c, p, n, k, m. Однако при решении ряда задач бывает целесообразно придать параметру статус переменной, а переменной – статус параметра. Такой подход называется решением относительно параметра. В самом деле, предложение P(x; a) можно считать как предложением с переменной (x) и параметром (a), так и предложением с переменной (a) и параметром (x).

В отношении уравнений (неравенств) с параметром чаще всего встречаются *две постановки задачи*.

1) Для каждого значения параметра найти все решения заданного уравнения (неравенства).
2) Найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения (неравенства) удовлетворяют заданным требованиям.

Основной принцип решения уравнений (неравенств) с параметром состоит в следующем: нужно разбить область допустимых значений параметра на такие участки, в каждом из которых уравнение (неравенство) решается одним и тем же способом. Отдельно для каждого такого участка находятся решения, зависящие от значений параметра. Ответ к уравнению (неравенству) состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого из них всех решений этого уравнения (неравенства).

Замечания.

1) Указанный подход к решению задач с параметром часто называется методом ветвления.

2) Для осуществления такого плана нужно знать "граничные" или "контрольные" значения параметра, которые разбивают ОДЗ на указанные участки. Поиск этих значений тесно связан со спецификой параметра и его двойственной природой ("число" – "неизвестная").

Специфика уравнений (неравенств) с параметром состоит в том, что изменение значений параметра влечет за собой изменение не только коэффициентов, но и ряда других характеристик.

1) *Степень уравнения* (Например, уравнение $ax^2 - 3x + 6 = 0$ при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ – квадратным).

2) *Характер монотонности функции* (Например, функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей).

3) *ОДЗ переменной* (Например, в неравенстве $\sqrt{ax} > x + 1$ область допустимых значений переменной также зависит от a: при $a = 0$ ОДЗ: $x \in R$, при $a > 0$: ОДЗ: $x \geq 0$, при $a < 0$ ОДЗ: $x \leq 0$).

§1. Линейные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a выясните, какое из чисел больше: $3a$ или $2a + 1$.

♦ Найдем разность данных чисел: $3a – 2a – 1 = a – 1$.

При $a = 1$ разность равна нулю, следовательно, числа равны.

При $a > 1$ разность положительна, следовательно, первое число больше.

При $a < 1$ разность отрицательна, следовательно, первое число меньше.

Ответ: при $a = 1$ числа равны, при $a > 1$ первое число больше,
при $a < 1$ второе число больше.

ПРИМЕР 2. Решите уравнение $a^2(x-1)+6x=(5x-2)a$.

♦ После преобразований данное уравнение примет вид:
$(a-2)(a-3)x = a(a-2)$.

Для того, чтобы выразить x нужно будет поделить a(a-2) на (a-2)(a-3). Но выполнение этой операции возможно не всегда (делить на нуль нельзя). Все выше сказанное определяет дальнейший ход рассуждений: исследовать случаи, когда коэффициент при x равен нулю и когда – отличен от нуля.

Если $a = 2$, то уравнение примет вид $0x=0$. Решением полученного уравнения является любое действительное число.

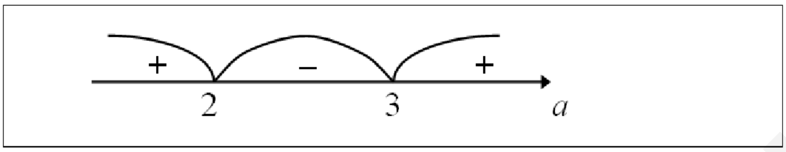
Если $a = 3$, то уравнение примет вид $0x = 3$. Решений нет.

Если $a \neq 2$ и $a \neq 3$, то $x = \dfrac{a\,(a-2)}{(a-2)(a\text{-}3)} = \dfrac{a}{a-3}$.

Ответ: при $a = 2$ $x \in R$; при $a = 3$ решений нет;
при $a \neq 2$ и $a \neq 3$ $x = \dfrac{a}{a-3}$.

ПРИМЕР 3. Решите неравенство $(a-2)(a-3)x \geq a(a-2)$.

♦ *Ход рассуждений при решении этого неравенства частично схож с рассуждениями в предыдущем примере. Принципиальное же отличие состоит в том, что отдельно* *нужно рассмотреть случаи, когда коэффициент при x равен нулю, положительный и отрицательный. Это связано с тем, что деление обеих частей неравенства на положительное число не меняет знак неравенства, в то время как деление обеих частей неравенства на отрицательное число приводит к замене знака неравенства ему противоположным. Следующий рисунок показывает, при каких значениях параметра a число* $(a-2)(a-3)$ *равно нулю, при каких – положительно, а при каких – отрицательно.*



Если $a = 2$, то неравенство примет вид $0x \geq 0$. Решением полученного неравенства является любое действительное число.

Если $a = 3$, то неравенство примет вид $0x \geq 3$. Решений нет.

Если $a \in (2\,;3)$, то $x \leq \dfrac{a}{a-3}$.

Если $a \in (-\infty\,;\ 2) \cup (3; +\infty)$, то $x \geq \dfrac{a}{a-3}$.

Ответ: при $a = 2$ $x \in R$; при $a = 3$ решений нет;

при $a \in (2\,;3)$ $x \leq \dfrac{a}{a-3}$; при $a \in (-\infty\,;\ 2) \cup (3; +\infty)$ $x \geq \dfrac{a}{a-3}$.

ПРИМЕР 4. Решите уравнение с параметром $\left(\dfrac{25}{a} - a\right)x = a - \dfrac{5}{a} - 4$.

♦ При $a = 0$ данное уравнение теряет смысл, а значит, и не имеет корней. При $a \neq 0$ исходное уравнение приводится к уравнению следующего вида: $(5-a)(5+a)x = (a-5)(a+1)$.

Если $a = 5$, то решением является любое действительное число.

Если $a = -5$, то уравнение решений не имеет.

Если $a \neq 5$ и $a \neq -5$, то $x = -\dfrac{a+1}{a+5}$.

Ответ: при $a = 0$ и $a = -5$ решений нет; при $a = 5$ $x \in R$,

при $a \neq -5$, $a \neq 0$ и $a \neq 5$ $x = -\dfrac{a+1}{a+5}$.

ПРИМЕР 5. Решите неравенство $ax < b$.

♦ *Пример 3 уже предопределяет ход рассуждений при решении этого неравенства: нужно рассмотреть случаи* $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$. *Заметим, что значения параметра* b *являются существенными только в первом случае, когда* $a = 0$.

Если $a = 0$ и $b > 0$, то решением неравенства является любое действительное число.

Если $a = 0$ и $b \le 0$, то неравенство не имеет решений.

Если $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ и $b > 0$ $x \in R$; при $a = 0$ и $b \le 0$ решений нет;

при $a > 0$ $x < \frac{b}{a}$; при $a < 0$ $x > \frac{b}{a}$.

ПРИМЕР 6. Для каждого значения параметра a укажите количество решений $(x; y)$ системы уравнений $\begin{cases} 3y - (a-2)x = 5, \\ 3ay + (3a-6)x = 10. \end{cases}$

♦ При $a = 0$ система принимает вид $\begin{cases} 3y + 2x = 5, \\ -6x = 10 \end{cases}$ и, очевидно, имеет одно решение. При $a \ne 0$ получаем систему $\begin{cases} y = \frac{a-2}{3}x + \frac{5}{3}, \\ y = \frac{2-a}{a}x + \frac{10}{3a}. \end{cases}$

Эта система может а) не иметь решений; б) иметь бесконечно много решений; в) иметь единственное решение.

а) $\begin{cases} \frac{a-2}{3} = \frac{2-a}{a}, \\ \frac{5}{3} \ne \frac{10}{3a} \end{cases} \Leftrightarrow a = -3.$ б) $\begin{cases} \frac{a-2}{3} = \frac{2-a}{a}, \\ \frac{5}{3} = \frac{10}{3a} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$

в) $\frac{a-2}{3} \ne \frac{2-a}{a}$. Решением этого неравенства будут все a, кроме -3; 0; 2.

Ответ: при $a = -3$ решений нет; при $a = 2$ бесконечно много решений;

при $a \ne -3$ и $a \ne 2$ одно решение.

ПРИМЕР 7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-1|=x+2$ имеет ровно один корень. Укажите этот корень для каждого такого значения a.

♦ *Для того чтобы перейти от данного уравнения к уравнению, не содержащему модуль, нужно рассмотреть два случая:* $x \geq 1$ *и* $x<1$. *После раскрытия модуля исходное уравнение примет вид линейного. Однако нужно помнить, что значение x, найденное, например, в первом случае, должно удовлетворять условию* $x \geq 1$. *В противном случае корень будет посторонним. Аналогично для второго случая. Таким образом, получим:*

1 случай. Если $x \geq 1$, то данное уравнение примет вид $a(x-1) = x + 2$. После преобразований получим $(a-1)x = a + 2$. При $a = 1$ корней нет.

При $a \neq 1$ $x = \dfrac{a+2}{a-1}$. Найденное значение x является корнем исходного уравнения при выполнении условия $x \geq 1$. Решим неравенство $\dfrac{a+2}{a-1} \geq 1$.

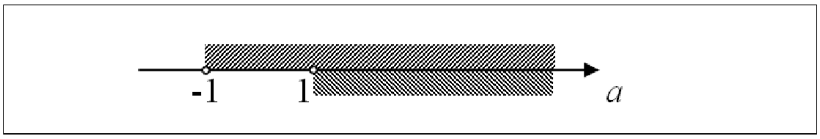
После преобразований получим равносильное ему неравенство $\dfrac{3}{a-1} \geq 0$, решением которого будут все $a \in (1;+\infty)$. Таким образом, только при $a \in (1;+\infty)$ $x = \dfrac{a+2}{a-1}$ является корнем исходного уравнения.

2 случай. Если $x < 1$, то данное уравнение примет вид $a(1-x) = x + 2$. После преобразований получим $(a+1)x = a-2$. При $a = -1$ корней нет.

При $a \neq -1$ $x = \dfrac{a-2}{a+1}$. Найденное значение x является корнем исходного уравнения при выполнении условия $x < 1$. Решим неравенство $\dfrac{a-2}{a+1} < 1$.

После преобразований получим равносильное ему неравенство $\dfrac{-3}{a+1} < 0$, решением которого будут все $a \in (-1;+\infty)$. Таким образом, только при $a \in (-1;+\infty)$ $x = \dfrac{a-2}{a+1}$ является корнем исходного уравнения.

Отметим на числовой оси значения параметра a, при которых исходное уравнение имеет найденные корни.



Видим, что при $a \in (-1; 1]$ (на рисунке одна штриховка) уравнение имеет ровно один корень. Этот корень $x = \dfrac{a-2}{a+1}$.

Ответ: $a \in (-1; 1]$; $x = \dfrac{a-2}{a+1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра *a* сравните числа

а) a и $-a$;

б) a и a^2.

№ 2. Для каждого значения параметра *a* решите уравнение

а) $(a-7)(a-3)x = (a+1)(a-7)$;

б) $a^2(x-1) = 4x + 3a + 2$;

в) $ax = 5x - 1$;

г) $\left(\dfrac{4}{a} - a\right)x = 1 - a + \dfrac{2}{a}$;

д) $\dfrac{ax-1}{a+2} = 3$;

е) $|x+1| = a - 3$;

ж) $a^3(x-a) = 9(ax-9)$;

з) $||x| - a| = 2$.

№ 3. Для каждого значения параметра *a* решите неравенство

а) $(a+5)(a-1)x > a(a-1)$;

б) $ax \le x + 3$;

в) $a^2(x-1) < 9x - 5a + 6$;

г) $\left(1 - \dfrac{3}{a}\right)x \le 1 + \dfrac{2}{a}$;

д) $|x+1| \le a - 3$;

е) $|x - 2a| < |x|$;

ж) $a^3(x-a) \le 9ax - 81$;

з) $16 - 4ax > a^4 - a^3x$.

№ 4. Решите уравнение (неравенство) с параметрами a и b

а) $(a^2 - 1)x = b$;

б) $ax = \dfrac{1}{b}$;

в) $(a+1)x \ge b - 1$;

г) $(a^2 + b^2)x = b^4 - a^4$.

№ 5. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

а) $\begin{cases} ax + 2y = 6, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x - ay = 4, \\ ax + y = 2. \end{cases}$

№ 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x+4| = x+2$ имеет ровно два корня. Укажите эти корни.

№ 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-5| = x+1$ имеет ровно один корень.

№ 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a|x+4| > x+2$ выполняется для любого действительного x;

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a|x+3| \ge 5-x$ не имеет решений.

№ 10. Для каждого значения параметра a решите уравнение $|x-a| + |x| = a$.

§2. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Решите уравнение с параметром $x^2 - 2x + a = 0$.

♦ *Ясно, что количество корней квадратного уравнения зависит от значения дискриминанта. Поэтому решение задачи будет связано с анализом значений дискриминанта данного уравнения* $D_1 = 1 - a$.

Если $a > 1$, то $D_1 < 0$. В этом случае уравнение не имеет корней.

Если $a = 1$, то $D_1 = 0$. В этом случае получим один[1] корень $x = 1$.

Если $a < 1$, то $D_1 > 0$, следовательно, уравнение имеет два различных действительных корня $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Ответ: при $a > 1$ решений нет;

при $a = 1$ $x = 1$;

при $a < 1$ $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

[1] Часто говорят, что в этом случае уравнение имеет два равных корня.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 - 2x + a = 0$ имеет ровно один корень. Для каждого такого a укажите этот корень.

♦ *Было бы неверно сразу найти дискриминант и приравнять его к нулю. Дело в том, что данное уравнение не при всех значениях параметра a является квадратным. Поэтому сначала нужно исследовать случай, когда уравнение будет линейным и только потом переходить к рассмотрению дискриминанта квадратного уравнения.*

Если a=0, то уравнение примет вид $-2x = 0$. Его корень $x = 0$.

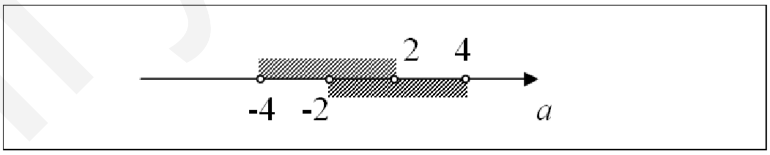
Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным. $D_1 = 1 - a^2$. $D_1 = 0$ при a = -1 или a = 1, причем, если a = -1, то x = -1; если a = 1, то x = 1.

Ответ: при $a = 0$ $x = 0$, при a = -1 x = -1, при a = 1 x = 1.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ принадлежит интервалу (-3; 3).

♦ Корнями данного квадратного уравнения являются $x = a - 1$ и $x = a + 1$. Заметим, что при любом значении параметра a корни различны, так как a-1< a+1.

Найдем все a, при которых первый корень принадлежит интервалу (-3; 3): $-3 < a - 1 < 3$, откуда $-2 < a < 4$. Далее аналогично определяем, что при $-4 < a < 2$ второй корень принадлежит интервалу (-3; 3).

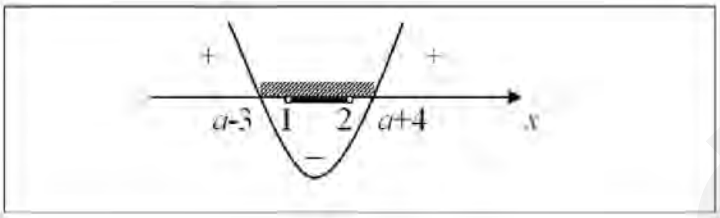


Приведенный рисунок наглядно показывает, что при $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$ (на этих участках одна штриховка) ровно один корень уравнения принадлежит интервалу (-3; 3).

Ответ: $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 12 \leq 0$ выполняется при любом $x \in (1; 2)$.

♦ Корнями квадратичной функции $y = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 12$ являются $x = a - 3$ и $x = a + 4$, причем $a - 3 < a + 4$ для любого значения параметра a. Решением неравенства будет отрезок $[a - 3;\ a + 4]$. Очевидно, что требование задачи будет выполнено, если интервал $(1; 2)$ целиком содержится в отрезке $[a-3; a+4]$.



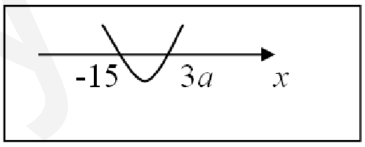
Решая систему $\begin{cases} a-3 \le 1, \\ a+4 \ge 2, \end{cases}$ находим $-2 \le a \le 4$.

Ответ: $-2 \le a \le 4$.

ПРИМЕР 5. Для каждого a решите неравенство $(x+15)(x-3a) < 0$.

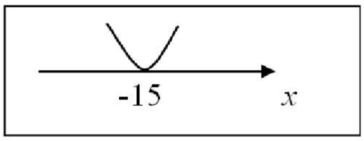
♦ Корнями квадратичной функции $f(x) = (x+15)(x-3a)$ являются $x = -15$ и $x = 3a$. Так как однозначно указать, какое из этих чисел больше, а какое – меньше, нельзя, то рассмотрим все возможные случаи:

1) $-15 < 3a \Leftrightarrow a > -5$.



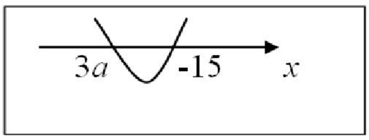
$15 < x < 3a$.

2) $-15 = 3a \Leftrightarrow a = -5$.



Решений нет.

3) $-15 > 3a \Leftrightarrow a < -5$.



$3a < x < -15$.

Ответ: при $a > -5$ $x \in (-15; 3a)$;

при $a = -5$ решений нет;

при $a < -5$ $x \in (3a; -15)$.

ПРИМЕР 6. Для каждого значения параметра a решите неравенство $ax^2-(2a+1)x+2>0$.

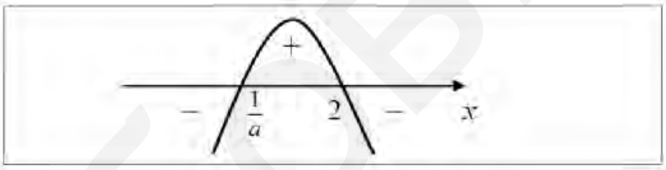
♦ *Сразу заметим, что при* $a=0$ *неравенство будет линейным, а при* $a\neq 0$ *– квадратным. В случае квадратного неравенства важен знак числа* a*, потому что именно он будет определять, куда направлены ветви параболы – графика квадратичной функции* $y=ax^2-(2a+1)x+2$*,* $(a\neq 0)$*.*

Если $a = 0$, то исходное неравенство примет вид $-x + 2 > 0$, откуда $x < 2$.

Если $a\neq 0$, то данное неравенство является квадратным. Корни квадратичной функции $y=ax^2-(2a+1)x+2$: $x=2$ или $x=\dfrac{1}{a}$.

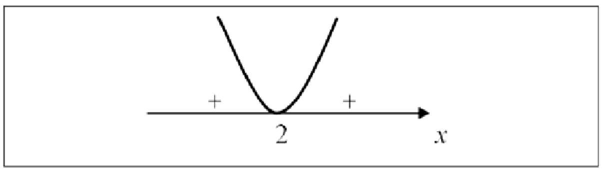
При $a<0$ ветви параболы направлены вниз. Кроме того, при $a < 0$ $2>\dfrac{1}{a}$.

В этом случае решением неравенства будут все $x\in\left(\dfrac{1}{a};2\right)$.

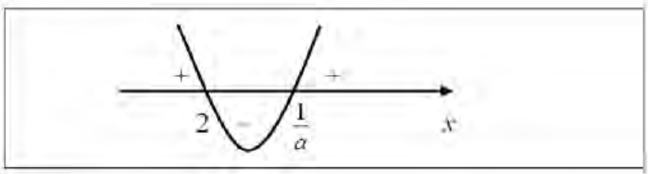


При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, однако нельзя однозначно указать, какой корень квадратичной функции больше, а какой меньше. Необходимо рассмотреть все возможные варианты.

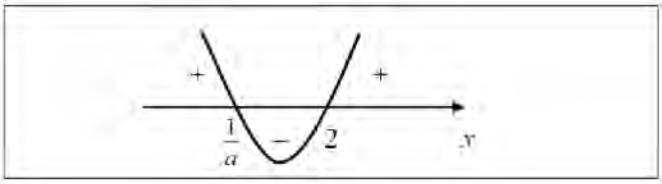
При $a = 0,5$ корни квадратичной функции совпадают, и решением неравенства являются все $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.



При $0<a<0,5$ $2<\dfrac{1}{a}$. В этом случае решения: $x\in(-\infty;2)\cup\left(\dfrac{1}{a};+\infty\right)$.



При $a>0{,}5$ $2>\frac{1}{a}$. Решением неравенства будут все $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right)\cup(2;+\infty)$.



Ответ: при $a<0$ $x\in\left(\frac{1}{a};2\right)$, при $a=0$ $x\in(-\infty;2)$,

при $0<a<0{,}5$ $x\in(-\infty;2)\cup\left(\frac{1}{a};+\infty\right)$,

при $a=0{,}5$ $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, при $a>0{,}5$ $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right)\cup(2;+\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $x^2+6x+a=0$; б) $x^2-2ax+5a-6=0$; в) $2x^2-3ax-2a^2+2=0$;

г) $x^2-3ax+4=0$; д) $(a+4)x^2-6x+a-4=0$; е) $ax^2+2x+1=0$.

№ 2. Для каждого значения параметра a определите, сколько различных действительных корней имеет уравнение

а) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$; б) $(a+10)x^2-2(a-2)x+2=0$.

№ 3. Для каждого значения параметра a решите неравенство

а) $x^2-(2a+1)x+a^2+a\le 0$; б) $x^2-4x+8a-a^2-12>0$;

в) $x^2+ax+1>0$; г) $ax^2+x+1<0$;

д) $(1+a)x^2-2ax+a-3\le 0$; е) $\frac{x^2}{a}-2x-\frac{x}{a}+a+1>0$.

№ 4. Найдите все значения параметра *a*, при которых для уравнения (неравенства) выполняется следующее условие:

а) оба корня уравнения $x^2-(3a+3)x+2a^2+6a=0$ меньше двух;

б) ровно один корень уравнения $5x^2+(5-6a)x+a^2-a=0$ принадлежит интервалу (0; 2);

в) один из корней уравнения $x^2+ax+a^2-3a-4=0$ равен 1, а другой – отрицательный;

г) неравенство $ax^2+(a-1)x+a-3<0$ верно при любом значении x;

д) неравенство $x^2-(2a+1)x+a^2+a-2\geq 0$ выполняется для любого $x\in(1;+\infty)$.

№5. Для каждого значения a решите уравнение $x^2-2a\cdot|x|+a^2-4=0$.

§3. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Решите уравнение с параметром $\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{a}{x+1}$.

♦ *План решения этого уравнения состоит в следующем: после преобразований получить линейное уравнение, найти его корень и выяснить, при каких значениях параметра он является посторонним (обращает знаменатель дроби в нуль).*

Область допустимых значений переменной (ОДЗ): $x\neq 0$ и $x\neq -1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $(a-1)(x+1)=ax$, откуда находим $x=a-1$. Теперь выясним, при каких значениях параметра a найденное значение x является посторонним корнем для исходного уравнения: $a-1=0$ при $a=1$; $a-1=-1$ при $a=0$.

Ответ: при $a=1$ и $a=0$ корней нет, при $a\neq 1$ и $a\neq 0$ $x=a-1$.

ПРИМЕР 2. Решите уравнение с параметром $\dfrac{x+2}{a+1}=\dfrac{2x-a-1}{x-2}$.

♦ Сразу заметим, что при $a=-1$ уравнение теряет смысл, а следовательно, не имеет корней. Далее рассматриваем только случай $a\neq -1$.

ОДЗ: $x\neq 2$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $(x+2)(x-2)=(2x-a-1)(a+1)$. После преобразований получим уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2+2a-3=0$, корни которого $x=a-1$ и $x=a+3$.

Первый корень принимает "запретное" значение при $a = 3$; второй корень в этом случае равен 6. Таким образом, при $a = 3$ уравнение имеет один корень $x = 6$.

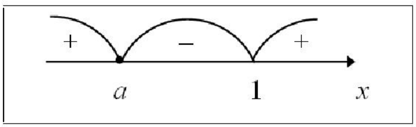
Второй корень принимает "запретное" значение при $a = -1$. Однако случай $a = -1$ уже был рассмотрен (при $a = -1$ исходное уравнение теряет смысл).

Ответ: при $a = -1$ корней нет, при $a = 3$ единственный корень $x = 6$, при $a \neq -1$ и $a \neq 3$ уравнение имеет два корня $x = a - 1$ и $x = a + 3$.

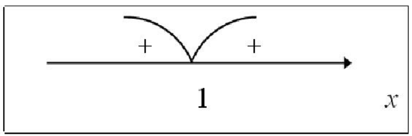
ПРИМЕР 3. Решите неравенство с параметром $\dfrac{x-a}{x-1} \geq 0$.

♦ Решим данное неравенство методом интервалов. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x-a}{x-1}$: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $f(x) = 0$ при $x = a$. Точки 1 и a разбивают числовую прямую на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак. Так как определить порядок расположения этих точек на числовой прямой однозначно нельзя, то необходимо рассмотреть все возможные случаи: $a < 1$, $a = 1$ и $a > 1$.

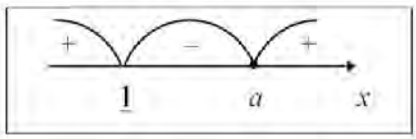
Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a] \cup (1; +\infty)$.



Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.



Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup [a; +\infty)$.



Ответ: при $a < 1$ $x \in (-\infty; a] \cup (1; +\infty)$,

при $a = 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$,

при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup [a; +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a сравните числа

а) a и $\frac{1}{a}$; б) $\frac{3}{a-1}$ и $\frac{2}{a+1}$.

№ 2. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $\frac{x+a}{ax}+\frac{2a-1}{x^2-ax}=\frac{2a-1}{ax-a^2}$; б) $\frac{2x+a-1}{x-1}=1$;

в) $\frac{x-1}{x-a}=0$; г) $\frac{ax}{a-x}=1$;

д) $\frac{x}{a^2-1}=\frac{a}{ax-1}$; е) $\frac{2x^2-(3a+2)x+a^2+a}{x-3}=0$;

ж) $\frac{x^2-(3-a)x+3a-2a^2}{x^2-9}=0$; з) $\frac{x^2-(3a-3)x+2a^2-6a}{25-x^2}=0$.

№ 3. Для каждого значения параметра a решите неравенство

а) $\frac{x+a}{2x}\geq 1$; б) $\frac{a-1}{x+a}<\frac{-1}{x}$;

в) $\frac{(x-a)^2}{x^2-1}\leq 0$; г) $\frac{1}{x}\leq a$;

д) $\frac{x+8}{2a-x}\geq 0$; е) $\frac{12-x}{(x-3a)x}\leq 0$.

§4. Теорема Виета

ПРИМЕР 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+4=0$ равна 1.

♦ ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. По теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1\cdot x_2=4. \end{cases}$ Из уравнения $a^2-8=1$ находим $a=-3$ или $a=3$. Однако полученный результат нельзя считать ответом. Легко проверить, что при $a=-3$ и $a=3$ квадратное уравнение не имеет действительных корней. Поэтому, используя теорему Виета, мы не должны забывать о существовании действительных корней уравнения.

Итак, задача сводится к решению системы $\begin{cases} a^2-16\ge 0, \\ a^2-8=1. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

Ответ: таких значений параметра a нет.

Заметим, что условие $a^2-16\ge 0$ *предполагает, что при* $D = 0$ *квадратное уравнение имеет также два корня (одинаковых). Если бы в условии задачи говорилось о различных корнях квадратного уравнения, то первое неравенство системы должно быть строгим:* $a^2-16>0$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения параметра a, при которых сумма кубов различных действительных корней уравнения $x^2-3x+4a=0$ меньше 18.

$D = 9 - 16a$. Если данное квадратное уравнение имеет действительные корни x_1 и x_2, то по теореме Виета $x_1+x_2=3$, а $x_1\cdot x_2=4a$.

$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=3(9-12a)=27-36a$.

Таким образом, искомые значения параметра находим из системы $\begin{cases} 9-16a>0, \\ 27-36a<18. \end{cases}$ Ее решением будет промежуток $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{16}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{4}<a<\frac{9}{16}$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3x^2-2(a+3)x-a^2-2a=0$ имеет корни разных знаков.

♦ Необходимым и достаточным условием того, что квадратное уравнение имеет корни разных знаков (x_1 и x_2), является неравенство $x_1\cdot x_2<0$. По теореме Виета имеем: $\frac{-a^2-2a}{3}<0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>0. \end{array}\right.$

Ответ: $a<-2$ или $a>0$.

Обратите внимание на то, что в нашем случае при выполнении неравенства $x_1\cdot x_2<0$ *дискриминант автоматически положителен.*

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4-2x^2-a+3=0$ имеет четыре различных действительных корня.

♦ Пусть $y=x^2$, тогда исходное уравнение примет вид $y^2-2y-a+3=0$ (1). Исходное уравнение имеет четыре различных корня, если квадратное уравнение (1) имеет два различных положительных корня. Это возможно при выполнении системы $\begin{cases} D>0, \\ y_1+y_2>0, \\ y_1\cdot y_2>0. \end{cases}$ По теореме Виета $\begin{cases} a>2, \\ 2>0, \\ 3-a>0, \end{cases}$

откуда находим $2<a<3$.

Ответ: $2<a<3$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2-(a-2)\cdot|x|+a^2-9=0$ имеет ровно три различных действительных корня.

♦ Пусть $y=|x|$, тогда исходное уравнение примет следующий вид: $y^2-(a-2)y+a^2-9=0$. Исходное уравнение имеет ровно три различных корня, если один из корней полученного квадратного уравнения равен нулю, а другой корень – положительный. По теореме Виета последнее требование достигается при выполнении системы $\begin{cases} a^2-9=0, \\ a-2>0, \end{cases}$ решением которой является $a=3$.

Ответ: $a=3$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-ax+a-3=0$ имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю больше.

♦ Корни данного квадратного уравнения удовлетворяют условию тогда и только тогда, когда их произведение будет отрицательно, а сумма положительна. По теореме Виета получим систему $\begin{cases} a-3<0, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<3$.

Ответ: $0<a<3$.

ПРИМЕР 7.* Найдите все значения a, при каждом из которых попарно различные корни уравнения $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии.

♦ $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ (1). Пусть $y=x^2$ ($y\geq 0$). Тогда уравнение (1) примет вид $y^2+(a-5)y+(a+2)^2=0$ (2).

Требование задачи выполняется лишь тогда, когда уравнение (1) имеет четыре различных действительных корня. Это возможно в том случае, если квадратное уравнение (2) имеет два различных положительных корня.

Если квадратное уравнение (2) имеет два различных положительных корня y_1 и y_2 ($y_1<y_2$), то корни уравнения (1) – числа $\pm\sqrt{y_1}$ и $\pm\sqrt{y_2}$. Они будут являться четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии, если будут расположены в порядке возрастания или убывания: $-\sqrt{y_2};-\sqrt{y_1};\sqrt{y_1};\sqrt{y_2}$ или $\sqrt{y_2};\sqrt{y_1};-\sqrt{y_1};-\sqrt{y_2}$. В каждом из этих случаев выполняется соотношение $3\sqrt{y_1}=\sqrt{y_2}$ (*), откуда $y_2=9y_1$.

Рассмотрим систему уравнений, составленную на основе теоремы Виета для уравнения (2): $\begin{cases} y_1+(9y_1)=5-a, \\ y_1\cdot(9y_1)=(a+2)^2. \end{cases}$ Ее решением будут a=-5 или $a=-\dfrac{5}{13}$.

Далее проверкой убеждаемся, что при этих значениях, во-первых, дискриминант квадратного уравнения (2) положителен, а во-вторых, оба корня квадратного уравнения (2) больше нуля.

Заметим, что при a=-5 арифметическую прогрессию составят числа -3; -1; 1; 3. При $a=-\dfrac{5}{13}$ этими числами будут $-\sqrt{\dfrac{63}{13}};\ -\sqrt{\dfrac{7}{13}};\ \sqrt{\dfrac{7}{13}};\ \sqrt{\dfrac{63}{13}}.$

Ответ: $a=-5$ или $a=-\dfrac{5}{13}$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения *a*, при каждом из которых квадрат разности различных действительных корней трехчлена $ax^2-4x+3a+1$ меньше 8.

№ 2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2-(9+a)x+9=0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2$.

№ 3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2-4ax+5a-1$ равна 2.

№ 4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2+(a-2)\cdot|x|+5-6a+a^2=0$ имеет ровно два различных корня.

№ 5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2+(3+a)x+a-5=0$ имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю меньше отрицательного.

№ 6. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых квадратное уравнение $ax^2+2ax+9=0$ имеет корни одного знака.

№ 7. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^4-(a-2)x^2+a^2-9=0$ имеет ровно три различных корня.

№ 8. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^4-(a-3)x^2+a^2-16=0$ имеет ровно один корень.

№ 9. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет только положительные корни.

№ 10. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^4-2(a+1)x^2+a^2-9=0$ не имеет действительных корней.

№ 11. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых сумма квадратов различных действительных корней квадратного трехчлена $x^2-(a+2)x+4$ не превосходит 17.

№ 12. Найдите все значения a, при каждом из которых квадрат разности действительных корней уравнения $x^2 + (2a-2)x + a + 5 = 0$ меньше 24.

№ 13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + x + a - 1 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$.

№ 14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения $x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии.

№ 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 + ax^2 + (a+2)^2 = 0$ имеет четыре корня, причем величины, обратные корням, образуют арифметическую прогрессию.

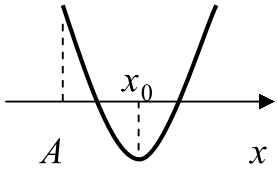
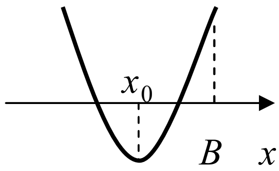
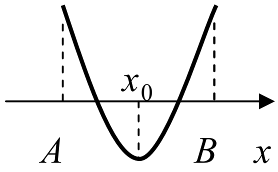
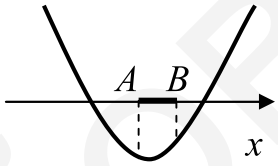
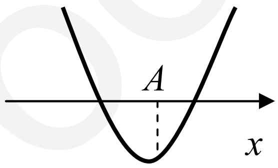
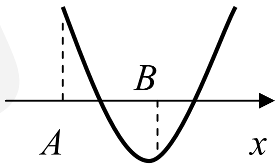
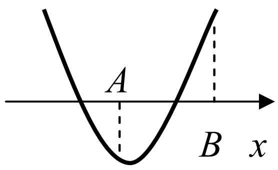
§5. Расположение корней квадратичной функции

Существует довольно большой класс задач с параметром, в которых необходимо делать ограничения на корни квадратичной функции $f(x) = x^2 + px + q$ *(оба корня больше 5, только один корень принадлежит отрезку* [-1; 1] *и т.д.). В таких случаях целесообразно придерживаться следующего плана.*

Если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ *является полным квадратом, то лучше найти корни уравнения и дальше работать с этими корнями (составить соответствующие неравенства).*

Если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ *не является полным квадратом, то корни уравнения лучше не находить, а нужные ограничения составить на основе следующих теорем (приведем их в виде следующей таблицы).*

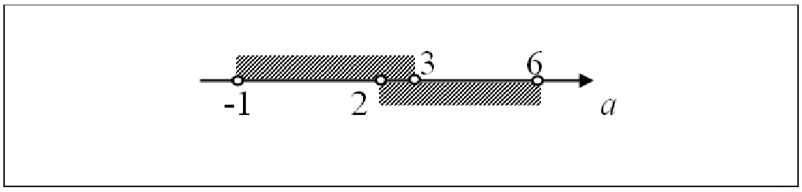
Здесь и далее x_0 *– абсцисса вершины параболы.*

ОГРАНИЧЕНИЕ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $f(x)=x^2+px+q$	ЭСКИЗ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $f(x)=x^2+px+q$	НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ПРИВЕДЕННОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ГРАФИКА
1. Оба корня больше заданного числа A		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(A) > 0, \\ x_0 > A. \end{cases}$
2. Оба корня меньше заданного числа B		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(B) > 0, \\ x_0 < B. \end{cases}$
3. Оба корня лежат в интервале (A; B)		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0, \\ A < x_0 < B. \end{cases}$
4. Отрезок [A; B] лежит между корнями		$\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) < 0. \end{cases}$
5. Заданное число A лежит между корнями		$f(A) < 0.$
6. Только меньший корень входит в интервал (A; B)		$\begin{cases} f(A)>0, \\ f(B)<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(A)>0, \\ f(B)=0, \\ x_0<B. \end{cases}$
7. Только больший корень входит в интервал (A; B)		$\begin{cases} f(A)<0, \\ f(B)>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(B)>0, \\ f(A)=0, \\ x_0>A. \end{cases}$

Если в теоремах (1) и (2) в качестве чисел A и B рассматривать 0, то мы приходим к условию, идентичному тому, которое получается на основе теоремы Виета.

ПРИМЕР 1. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+a-2=0$ принадлежит интервалу (1; 5).

♦ Дискриминант уравнения равен 9. Корни уравнения: $x = a - 1$ и $x = a+2$. $1 < a - 1 < 5$ при $2 < a < 6$; $1 < a + 2 < 5$ при $-1 < a < 3$.



Видим, что ровно один корень уравнения принадлежит интервалу (1; 5) при $-1<a\le 2$ или $3\le a<6$.

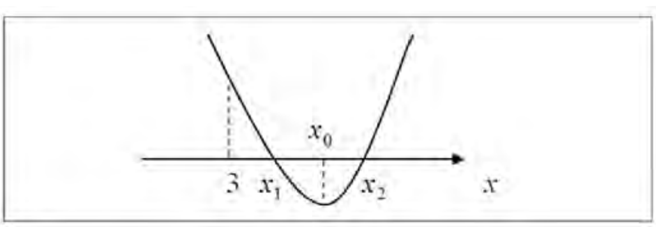
Ответ: $-1<a\le 2$ или $3\le a<6$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^2-6ax+9a^2-2a+2=0$ больше числа 3.

♦ <u>1 способ.</u> $D_1=2a-2$; $x_1=3a-\sqrt{2a-2}$, $x_2=3a+\sqrt{2a-2}$. Для того, чтобы найденные корни были больше 3 ($3<x_1\le x_2$), достаточно решить только одно неравенство: $3a-\sqrt{2a-2}>3$. Уединив радикал, получим неравенство $\sqrt{2a-2}<3a-3$, которое будет равносильно следующей системе

$$\begin{cases}3a-3>0,\\ 2a-2\ge 0,\\ 2a-2<(3a-3)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>1,\\ a\ge 1,\\ 9a^2-20a+11>0\end{cases} \Leftrightarrow\ a>\frac{11}{9}.$$

♦ <u>2 способ.</u> Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-2ax+9a^2-2a+2$. Ее корни больше 3 при выполнении системы $\begin{cases}D\ge 0,\\ f(3)>0,\\ x_0>3\end{cases}$ (теорема 1).



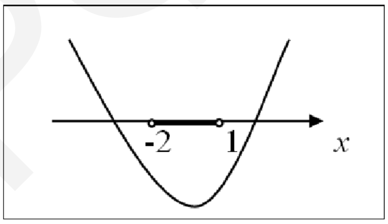
$$\begin{cases} 2a-2 \ge 0, \\ 9a^2-20a+11>0, \\ 3a>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 1, \\ a \in (-\infty; 1) \cup \left(\dfrac{11}{9}; +\infty\right), \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow \ a > \frac{11}{9}.$$

Ответ: $a > \dfrac{11}{9}$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2+ax+a-3<0$ выполняется для любого $-2<x<1$.

♦ Требование задачи выполняется, если интервал (– 2; 1) расположен между корнями квадратичной функции $f(x)=x^2+ax+a-3$.

Воспользуемся теоремой 4: $\begin{cases} f(-2) \le 0, \\ f(1) \le 0. \end{cases}$

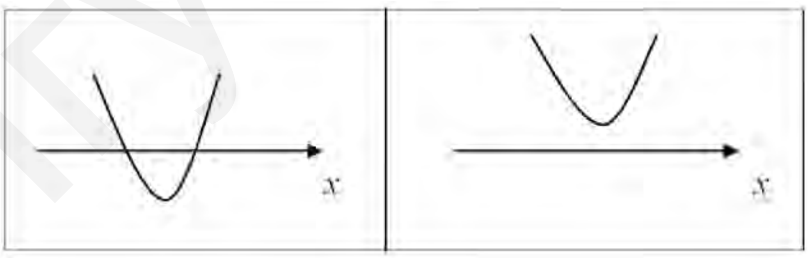


$$\begin{cases} 4-2a+a-3 \le 0, \\ 1+a+a-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 1, \\ a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1.$$

Ответ: $a = 1$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y=\sqrt{x^2-2ax+a+2}$ определена для любого действительного значения x.

♦ Данная функция определена для любого x, если для любого x выполняется неравенство $x^2-2ax+a+2 \ge 0$.



Последнее возможно тогда и только тогда, когда график квадратичной функции $f(x)=x^2-2ax+a+2$ расположен выше оси абсцисс или касается ее. Это выполняется, если уравнение $x^2-2ax+a+2=0$ не имеет корней или имеет один корень.

$D_1=a^2-a-2$. Из неравенства $a^2-a-2 \le 0$, находим $-1 \le a \le 2$.

Ответ: $-1 \le a \le 2$.

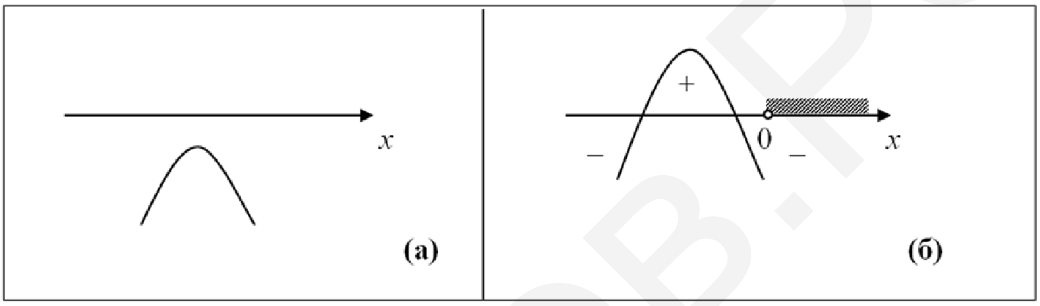
ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $ax^2 + ax + a + 3 > 0$ не имеет положительных решений.

♦ При $a = 0$ неравенство примет вид 3>0, что верно при любом x.

При $a \neq 0$ рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$. Легко заметить, что при $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх) неравенство имеет положительные решения. При $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз) данное неравенство не имеет положительных решений в двух случаях:

а) квадратичная функция $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$ не имеет корней;

б) корни квадратичной функции не превосходят 0.



а) D<0: $-3a^2 - 12a < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$. С учетом того, что a<0 получим $a \in (-\infty; -4)$.

б) Решим систему $\begin{cases} D \geq 0, \\ f(0) \leq 0, \\ x_0 \leq 0 \end{cases}$ с учетом того, что $a < 0$:

$$\begin{cases} -3a^2 - 12a \geq 0, \\ a + 3 \leq 0, \\ -\dfrac{a}{2a} \leq 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-4; 0], \\ a \leq -3, \\ a \neq 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-4; -3].$$

Объединяя решения для случаев (а) и (б), получим $a \in (-\infty; -3]$.

Ответ: $a \in (-\infty; -3]$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^2 + ax + a = 0$ меньше 1.

№ 2. Найдите все значения a, при каждом из которых оба корня уравнения $2x^2-(6-a)x+3a-a^2=0$ принадлежат промежутку $(0; 2]$.

№ 3. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше числа a.

№ 4. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^2-(2a+1)x+4-a=0$ лежат по разные стороны от числа 3.

№ 5. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $5x^2-10ax+4a^2-1=0$ принадлежит отрезку $[-1;1]$.

№ 6. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $(a+1)x^2-3ax+4a=0$ лежат в интервале $(2; 5)$.

№ 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2-ax-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно положительное решение.

№ 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+6x+a\ge 0$ выполняется для любого значения x.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $ax^2+4x+3a-1>0$ верно для любого $x>0$.

№ 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $y=\sqrt{ax^2+2x+a}$ определена ровно в одной точке.

№ 11. Найдите все значения a, при каждом из которых корни трехчлена $x^2+(a-12)x+25$ принадлежат интервалу $(4; 8)$.

№ 12. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+x-a^2-a=0$ входит в промежуток $(-2; 3)$.

№ 13. Найдите все значения a, при каждом из которых оба корня уравнения $x^2-ax-a=0$ меньше 2.

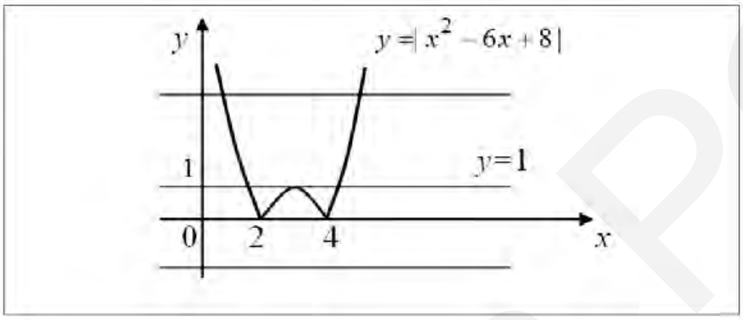
№ 14. Найдите все значения a, при каждом из которых оба корня уравнения $x^2-ax+a=0$ больше -2.

№ 15. Найдите все значения a, при каждом из которых ни один из корней уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+a-2=0$ не входит в промежуток $(1; 5)$.

§6. Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a определите количество корней уравнения $\left|x^2-6x+8\right|=a$.

♦ *Для решения этой задачи эффективен графический способ: построить график функции* $y=\left|x^2-6x+8\right|$, *и для каждого значения* a *определить количество общих точек этого графика с прямой* $y = a$.



По графику видим, что при $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ и $a > 1$ два корня; при $a = 1$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня.

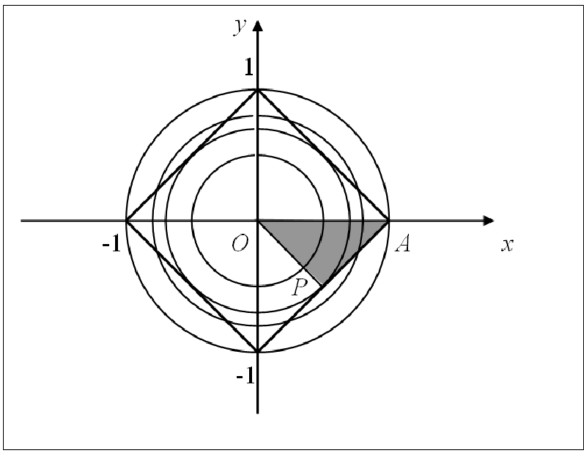
Ответ: при $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ и $a > 1$ два корня;

при $a = 1$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня.

ПРИМЕР 2. Для каждого значения параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$

♦ Первое уравнение системы на координатной плоскости Oxy задает квадрат, а второе уравнение – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OPA находим $OP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

По графику видим, что система не имеет решений, если $r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $r>1$; при $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $r=1$ – четыре решения; при $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<r<1$ – восемь решений.



С учетом того, что $r = |a|$, получим:

система не имеет решений, если $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$;

четыре решения, если $a \in \left\{\pm 1; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;

восемь решений, если $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ решений нет,

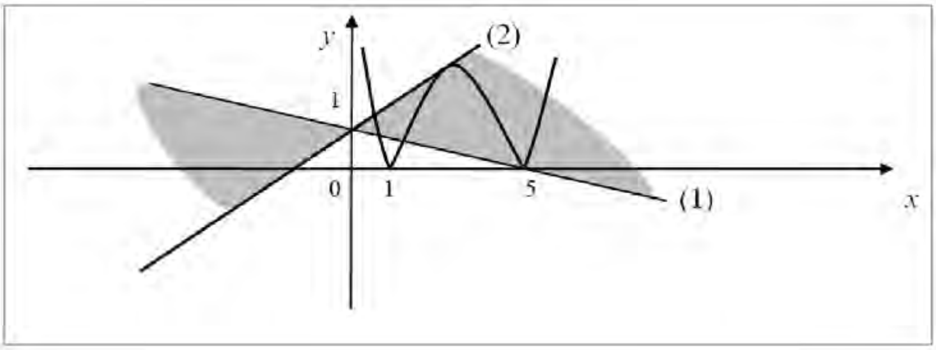
при $a \in \left\{\pm 1; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ четыре решения,

при $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ восемь решений.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $|x^2 - 6x + 5| = ax + 1$ имеет ровно 4 корня.

♦ Переформулируем задачу на графическом языке: нужно найти все значения параметра *a*, при которых прямая $y=ax+1$ (проходящая через точку (0; 1)) имеет четыре общих точки с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 5|$.

По графику видим, что условию задачи удовлетворяют все прямые, расположенные внутри заштрихованной области. Найдем граничные значения параметра, соответствующие прямым (1) и (2).



1) Прямая $y=ax+1$ проходит через точку (5; 0): $0=5a+1$, $a=-0{,}2$.

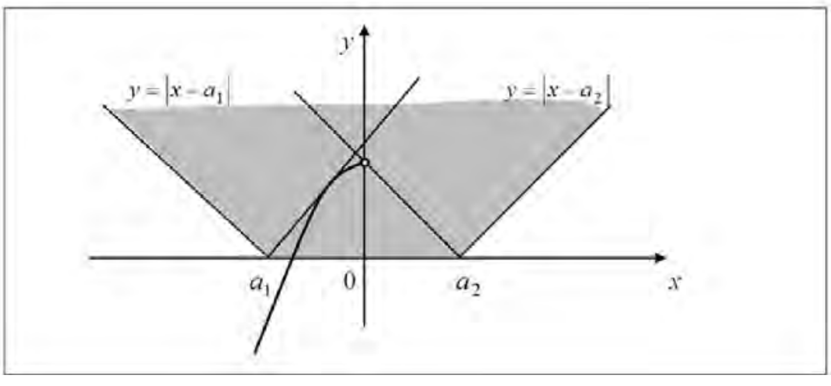
2) Прямая $y=ax+1$ касается параболы $y=-(x^2-6x+5)$. Следовательно, уравнение $-x^2+6x-5=ax+1$ должно иметь ровно один корень. $x^2+(a-6)x+6=0$. $D=(a-6)^2-24$. Решая уравнение $(a-6)^2-24=0$, находим $a=6\pm 2\sqrt{6}$. Очевидно, что прямой (2) соответствует угловой коэффициент $a=6-2\sqrt{6}$.

Ответ: $-0{,}2<a<6-2\sqrt{6}$.

Заметим, что значение $a=6+2\sqrt{6}$ получено не случайно. Оно также соответствует касанию прямой $y=ax+1$ и параболы $y=-x^2+6x-5$. Точка касания будет находиться в III четверти.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $3-x^2>|x-a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

♦ Переформулируем задачу на графическом языке: нужно найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одна точка графика функции $y=3-x^2$ с отрицательной абсциссой, лежащая выше точки графика функции $y=|x-a|$ с той же абсциссой.

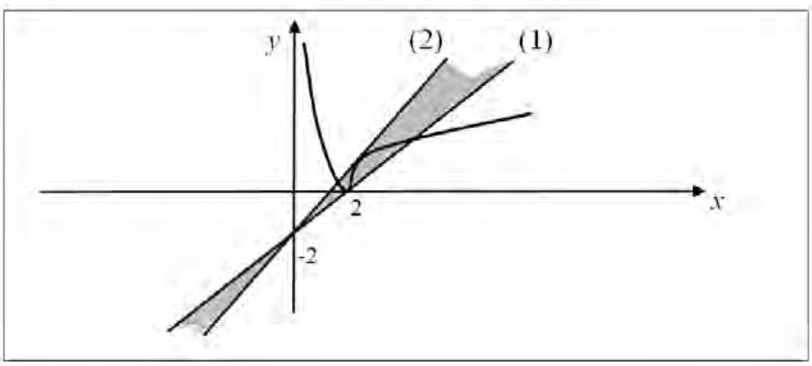


Из графических соображений ясно, что искомые значения $a \in (a_1;\ a_2)$. Значение a_2 соответствует тому, что левый луч уголка проходит через точку (0; 3). Подставляя координаты этой точки в уравнение $y = a_2 - x$, получим $a_2 = 3$. Значение a_1 соответствует тому, что правый луч уголка касается параболы, т.е. уравнение $3 - x^2 = x - a_1$ имеет ровно один корень. Дискриминант этого уравнения равен $13 + 4a_1$ и обращается в нуль при $a_1 = -\frac{13}{4}$. Таким образом, $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x} - 3\right| = ax - 2$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет ровно три корня.

♦ Найдем все значения параметра *a*, при которых прямая $y = ax - 2$ имеет ровно три общие точки с той частью графика функции $y = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$, которая расположена в правой полуплоскости (*x*>0). Последний график представляет собой правую ветку гиперболы $y = \frac{6}{x}$, которую а) сместили на 3 единицы вниз, б) ту часть графика, которая расположена ниже оси *Ox* зеркально отразили относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость. Заметим также, что прямая $y = ax - 2$ проходит через точку (0; -2) при любом значении параметра *a*, который является угловым коэффициентом.



Видим, что условию задачи отвечают все прямые, расположенные внутри заштрихованной области.

Значение параметра, соответствующее границе (1), находим из уравнения $0 = 2a - 2$, a=1.

Значение параметра, соответствующее границе (2), находим из условия касания прямой $y = ax - 2$ и графика функции $y = -\left(\frac{6}{x} - 3\right)$ (отраженной части гиперболы). Уравнение $-\frac{6}{x} + 3 = ax - 2$ должно иметь ровно один корень. После преобразований получаем квадратное уравнение $ax^2 - 5x + 6 = 0$ (очевидно, что $a > 0$), дискриминант которого приравниваем к нулю: $25 - 24a = 0$, $a = \frac{25}{24}$. Условию удовлетворяют все $a \in \left(1; \frac{25}{24}\right)$.

Ответ: $1 < a < \frac{25}{24}$.

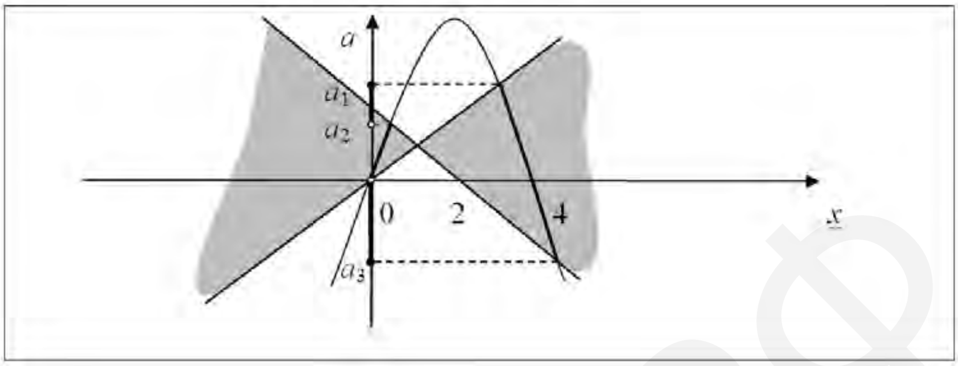
ПРИМЕР 6. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система $\begin{cases} a^2 - x^2 + 2x - 2a \le 0, \\ x^2 = 4x - a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

♦ Особенностью этой системы является отсутствие в ней переменной *y*. Чтобы использовать графический метод решения, придадим параметру *a* статус ординаты и рассмотрим координатную плоскость *Oxa*. После очевидных преобразований система примет вид $\begin{cases} (a - x)(a + x - 2) \le 0, \\ a = 4x - x^2. \end{cases}$

Неравенство системы на координатной плоскости *Oxa* задает пару закрашенных вертикальных углов, ограниченных прямыми $a=x$ и $a=2-x$. Уравнение задает параболу $a=4x-x^2$. Решение системы на графике представляет собой те участки параболы, которые попали в закрашенную область. По графику видим, что условию задачи удовлетворяют все значения параметра $a \in [a_3; 0) \cup (a_2; a_1]$.

Значение a_1 находим из системы $\begin{cases} a = x, \\ a = 4x - x^2, \end{cases}$ a_1=3.

(Другое решение системы a=0 соответствует второй точке пересечения прямой и параболы.)



Из системы $\begin{cases} a = 2 - x, \\ a = 4x - x^2 \end{cases}$ находим a_2 и a_3: $a_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $a_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Таким образом, искомые значения $a \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; 3\right]$.

Ответ: $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; 3\right]$.

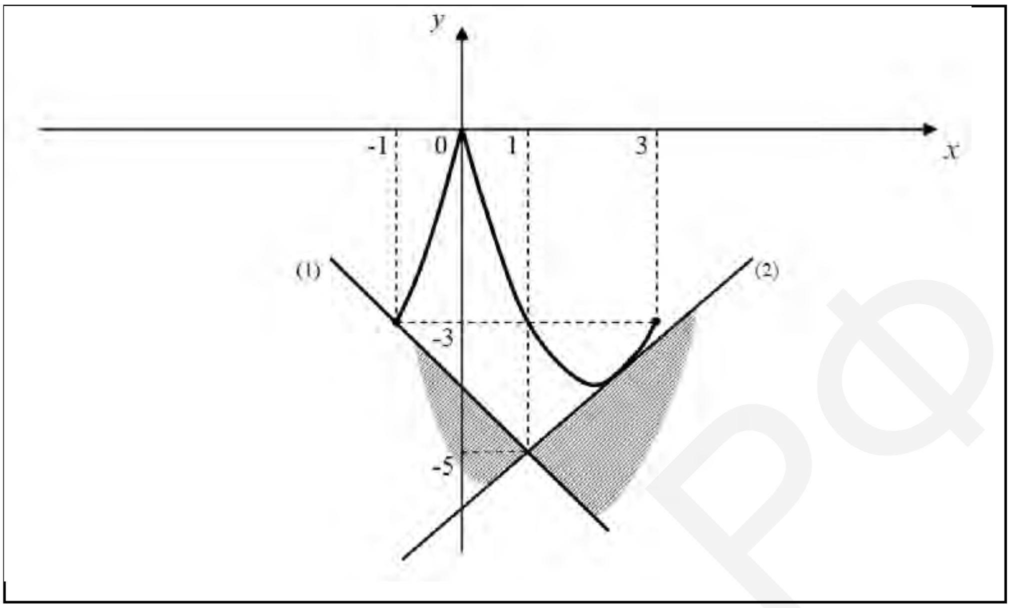
ПРИМЕР 7. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4|x| - ax + a$ на отрезке [-1; 3] не меньше, чем -5.

♦ Так как наименьшее значение функции на отрезке [-1; 3], не меньше, чем -5, то значения функции во всех точках отрезка также не меньше, чем -5. Следовательно, неравенство $x^2 - 4|x| - ax + a \geq -5$ должно выполняться для любого $x \in [-1; 3]$. Последнее неравенство перепишем в следующем виде $x^2 - 4|x| \geq a(x-1) - 5$.

Выясним, при каких значениях параметра a прямая $y = a(x-1) - 5$ будет располагаться *не выше* графика функции $y = x^2 - 4|x|$, построенного на отрезке [-1; 3].

Заметим, что прямая $y = a(x-1) - 5$ проходит через точку (1; -5). При изменении параметра a будет меняться угловой коэффициент (а значит, и угол наклона) этой прямой.

Условию задачи удовлетворяют все прямые, расположенные внутри закрашенной пары вертикальных углов, включая границы. Найдем значения a, соответствующие этим границам.



1) Значение a находим из условия, что прямая $y = a(x-1)-5$ проходит через точку (-1; -3): $-3 = -2a - 5$, $a = -1$.

2) Значение a находим из условия, что прямая $y = a(x-1)-5$ касается параболы $y = x^2 - 4x$. То есть уравнение $x^2 - 4x = a(x-1)-5$ должно иметь ровно один корень. Приведя уравнение к виду $x^2 - (4+a)x + a + 5 = 0$, потребуем, чтобы его дискриминант равнялся нулю.

$D = (4+a)^2 - 4a - 20 = a^2 + 4a - 4$. Решая уравнение $a^2 + 4a - 4 = 0$, находим $a = -2 - 2\sqrt{2}$ или $a = -2 + 2\sqrt{2}$. Легко понять, что нашему случаю удовлетворяет лишь одно значение $a = -2 + 2\sqrt{2}$.

Таким образом, искомые значения $a \in [-1; -2 + 2\sqrt{2}]$.

Ответ: $[-1; -2 + 2\sqrt{2}]$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x| - 3| = a - 3$ имеет ровно 4 корня.

№ 2. Для каждого значения a определите количество решений уравнения

а) $\left|1 - x^2\right| = 1 - a$; б) $\left||x| - a\right| = 2$.

№ 3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x+4|=x-3$ имеет ровно один корень.

№ 4. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2|x|+3|y|=6, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ имеет ровно 6 решений.

№ 5. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-4)^2+(y-3)^2=4, \\ (x-1)^2+(y+1)^2=a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№ 6. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \le 6x-4y-13, \\ x^2+y^2-4a^2 \le 8y-10x+4a-40 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№ 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x^2-2x-8|=a(x+5)+2$ не имеет корней.

№ 8. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x)=\left|\frac{6}{x}-5\right|-ax+1$ имеет более двух общих точек с осью абсцисс на промежутке $(0;+\infty)$.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{3}{x+1}=a|x-5|$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет ровно три корня.

№ 10. Найдите все значения параметра a, при каждом уравнение $(a+1-|x-1|)(a+x^2-4x)=0$ имеет четыре различных корня.

№ 11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=|x|+a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№ 12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} a^2+ax-2x-4a+4 \le 0, \\ xa=-4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

№ 13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} (y-a-2)^2+(x-a)^2=3a+5, \\ y \ge |x|. \end{cases}$ имеет единственное решение.

№ 14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{y^2+x^2-2ax+4ay+5a^2}=\sqrt{5}, \\ y=|x| \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№ 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} y^2+xy-7x-14y+49=0, \\ y=ax+1, \\ x \geq 3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№ 16. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функции $f(x)=(x-4)|x|+a$ $g(x)=|x-a|-a$ имеют ровно две общих точки.

№ 17. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=|x-2|\cdot(x+2)-|x-a|+2a$ принимает значение, равное a, ровно в трех различных точках.

№ 18. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций $f(x)=2+|x+\sqrt{x^2-8x+16}|$ и $g(x)=ax+4a$ имеют максимально возможное количество общих точек.

№ 19. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=a(x-1)-\left|x^2+4x+3\right|$ меньше (-3).

№ 20. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=|x^2-6x+5|-ax-3a$ меньше 2.

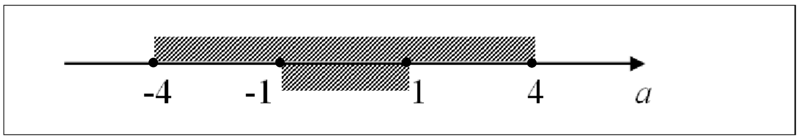
§7. Тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4\cos^2 x+5a\sin x-a^2-4=0$ имеет решения. Найдите эти решения.

♦ Данное уравнение сводится к уравнению $4\sin^2 x-5a\sin x+a^2=0$, которое равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin x=a, \\ \sin x=\dfrac{a}{4}. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности имеет решения, если $-1 \leq a \leq 1$. В этом случае $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n, \quad n \in Z$.

Второе уравнение совокупности имеет решения, если $-4 \leq a \leq 4$. В этом случае $x=(-1)^k \arcsin \dfrac{a}{4}+\pi k, \quad k \in Z$.



Видим, что исходное уравнение имеет решения при всех $-4 \le a \le 4$, причем, если $a \in [-1;1]$, то решения имеют оба уравнения совокупности (на рисунке две штриховки); если $a \in [-4;-1) \cup (1;4]$ (одна штриховка), то лишь второе уравнение совокупности имеет решения.

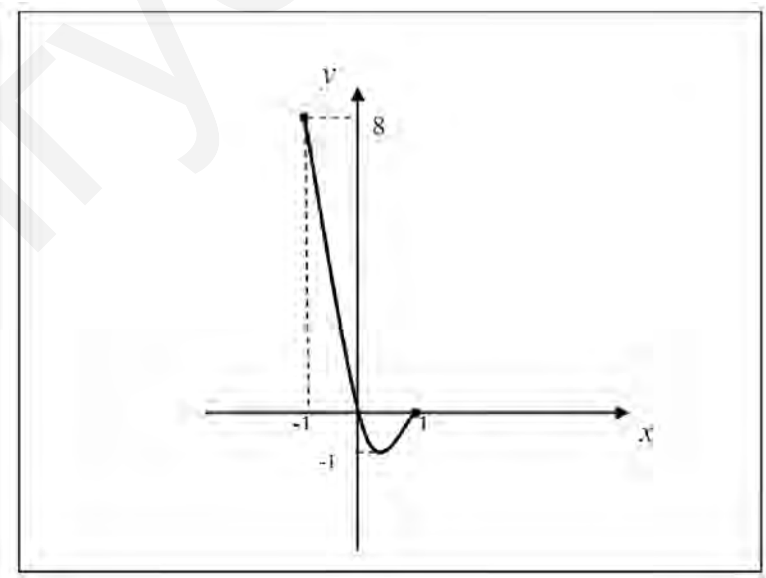
Ответ: уравнение имеет решения при всех $-4 \le a \le 4$.

При $a \in [-1;1]$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$, $x = (-1)^k \arcsin \dfrac{a}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$,

при $a \in [-4;-1) \cup (1;4]$ $x = (-1)^k \arcsin \dfrac{a}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x - 4\cos x - a + 2 = 0$ не имеет корней.

♦ После преобразований получим уравнение $4\cos^2 x - 4\cos x = a$. Пусть $\cos x = t,\ t \in [-1;1]$. Тогда необходимо выяснить, при каких значениях параметра *a* уравнение $4t^2 - 4t = a$ не имеет корней на отрезке [-1; 1]. Для этого изобразим на указанном отрезке график функции $y = 4t^2 - 4t$.



По графику видим, что уравнение не имеет корней, если *a*<-1 или *a*>8.

Ответ: *a*<-1 или *a*>8.

ПРИМЕР 3. Решите неравенство $\sin ax < \frac{1}{2}$.

♦ $\sin ax < \frac{1}{2}$; $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < ax < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Если $a = 0$, то исходное неравенство примет вид $\sin 0x < \frac{1}{2}$. Решением является любое действительное x.

Если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right) < x < \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

Если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) < x < \frac{1}{a}\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

Ответ: при $a = 0$ $x \in R$, при $a > 0$ $\frac{1}{a}\left(\frac{-7\pi}{6} + 2\pi n\right) < x < \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z$,

при $a < 0$ $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) < x < \frac{1}{a}\left(\frac{-7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z$.

ПРИМЕР 4. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\cos(x+a) - \sin(x-a) = 0$.

♦ Используя формулу приведения, преобразуем данное уравнение к виду $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - a\right) - \sin(x - a) = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 0$.

Если $\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 0$, то решением будет любое действительное x. Если $\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \neq 0$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} - \pi n,\ n \in Z$.

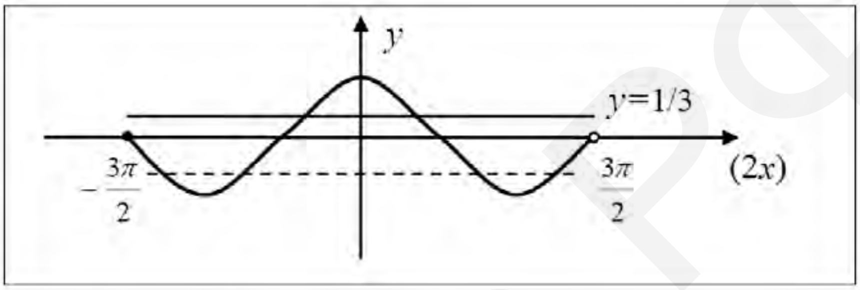
Осталось выяснить, при каких значениях параметра a $\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 0$.

Имеем $a - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, откуда находим $a = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: при $a = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ $x \in R$, при $a \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ $x = \frac{\pi}{4} - \pi n,\ n \in Z$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $3\cos^2 2x-(3a-2)\cos 2x+a-1=0$ имеет ровно шесть корней на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

♦ Пусть y = cos2x, тогда уравнение примет вид $3y^2-(3a-2)y+a-1=0$. Его корни: $y=\frac{1}{3}$ и $y=a-1$. Дальнейшие рассуждения проведем графическим способом.



Из условия следует, что $2x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$. На этом промежутке прямая $y=\frac{1}{3}$ пересекает график функции y = cos2x в двух точках.

Искомыми являются те значения a, при которых прямая $y = a - 1$ пересекает этот же график на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ ровно в четырех точках. Это возможно в случае, когда $-1 < a-1 < 0$, т.е. при $0 < a < 1$.

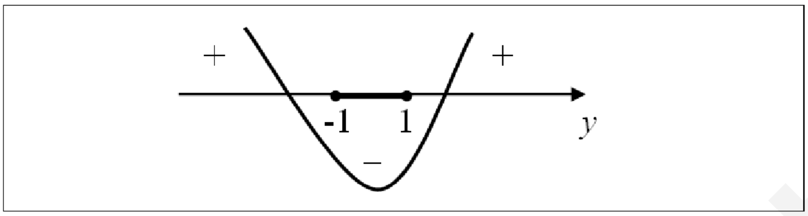
Ответ: $0 < a < 1$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\sin^2 7x+(2a+1)\sin 7x+a-5<0$ выполняется для любого действительного значения x.

♦ $\sin^2 7x+(2a+1)\sin 7x+a-5<0$. (1)

Пусть y = sin7x, причем E(y) = [–1; 1]. Тогда неравенство (1) примет вид $y^2+(2a+1)y+a-5<0$. (2)

Неравенство (1) будет выполняться для любого x, если для любого $y \in [-1; 1]$ будет выполняться неравенство (2). Это возможно только тогда, когда отрезок [-1; 1] будет расположен между корнями квадратичной функции $f(y) = y^2 + (2a+1)y + a - 5$.



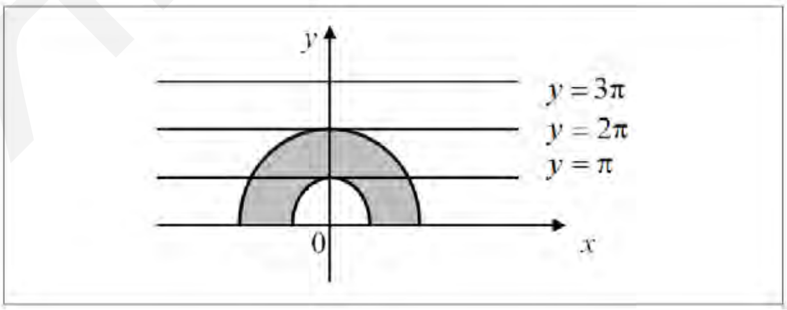
Приведенное расположение параболы задается системой $\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases}$

Имеем $\begin{cases} 1 - 2a - 1 + a - 5 < 0, \\ 1 + 2a + 1 + a - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5, \\ a < 1{,}5. \end{cases}$

Ответ: $-5 < a < 1{,}5$.

ПРИМЕР 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $tg\sqrt{a - x^2} = 0$ имеет ровно четыре корня.

♦ $tg\sqrt{a - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a - x^2} = \pi n, n \in Z$. На координатной плоскости $(x;y)$ графиком функции $y = \sqrt{a - x^2} = 0$ является полуокружность радиуса $r = \sqrt{a}$, $(a > 0)$, расположенная выше оси Ox (включая точки на оси); уравнение $y = \pi n, n \in Z$ задает семейство прямых, параллельных оси Ox.



По графику видим, что эти прямые имеют с полуокружностью ровно четыре общих точки, если $\pi < r < 2\pi$, откуда находим $\pi^2 < a < 4\pi^2$.

Ответ: $\pi^2 < a < 4\pi^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2a$; б) $\sin x + a|\sin x| = 2$;

в) $2\sin^2 x - 5a\cos x + 3a^2 - 2 = 0$; г) $4\sin^2 x - 4\sin x - a^2 - 8 = 0$.

№ 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ имеет ровно восемь корней.

№ 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x - (2a-1)\sin x + a^2 - a - 2 = 0$ не имеет корней.

№ 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos^2 x - (a-2)\cos x + 4a + 1 = 0$ не имеет корней.

№ 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x - (2a+3)\cos x + a^2 + 3a \le 0$ не имеет решений.

№ 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \sin(\pi y + \pi x) = 0 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

№ 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\sin^2 x - (2a+1)\sin x = a + 1$ имеет ровно 9 корней на отрезке $\left[-2\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№ 8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5\cos^2 2x - 10a\cos 2x + 4a^2 = 1$ имеет ровно три корня на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos^2 x + (a^2 - 1)\cos x - 5a + 6 = 0$ имеет два корня на отрезке $[-\pi; 3\pi]$.

№ 10. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

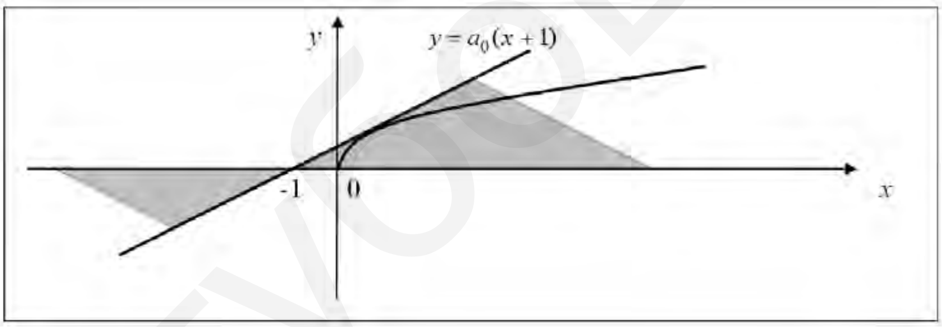
а) $\cos ax > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\dfrac{x}{a} \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tg(ax - x) \ge 1$.

§8. Иррациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a(x+1)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы один корень.

♦ Применим графический метод: найдем все значения a, при которых прямая $y = a(x+1)$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y=\sqrt{x}$. Заметим, что для прямой $y = a(x+1)$ параметр a является угловым коэффициентом (при изменении a одна прямая будет переходить в другую с помощью поворота около точки (-1; 0), так как для любого a $y(-1)= 0$).

По графику видим, что искомыми являются прямые, лежащие внутри заштрихованной пары вертикальных углов, включая границы. Им соответствуют значения $a \in [0; a_0]$, где a_0 отвечает моменту касания прямой $y = a(x+1)$ графика функции $y=\sqrt{x}$. (Заметим, что $a_0 > 0$).



Значение a_0 находим из условия, что уравнение $a_0(x+1)=\sqrt{x}$ имеет ровно один корень. После преобразований получим квадратное уравнение $a_0^2x^2+(2a_0^2-1)x+a_0^2=0$. Дискриминант $D=1-4a_0^2$ обращается в нуль при $a_0=-0{,}5$ или $a_0=0{,}5$. Так как $a_0>0$, то искомое значение $a_0=0{,}5$.

Ответ: $a \in [0; 0{,}5]$.

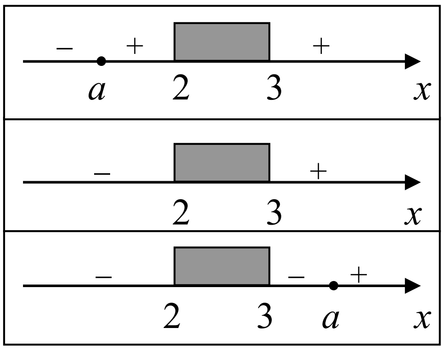
ПРИМЕР 2. Решите неравенство $(x-a)\sqrt{x^2-5x+6} \le 0$.

♦ Решим это неравенство методом интервалов. Область определения функции $f(x)=(x-a)\sqrt{x^2-5x+6}$ $D(f)=(-\infty; 2]\cup[3; +\infty)$. Нули функции – числа 2; 3 и a, если $a \in D(f)$.

1) Если $a < 2$, то $x \in (-\infty; a] \cup \{2; 3\}$.

2) Если $2 \le a \le 3$, то $x \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$.

3) Если $a > 3$, то $x \in (-\infty; 2] \cup [3; a]$.



Ответ: при $a < 2$ $x \in (-\infty; a] \cup \{2; 3\}$; при $2 \le a \le 3$ $x \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$;

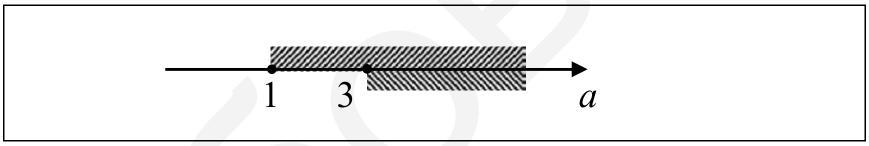
при $a > 3$ $x \in (-\infty; 2] \cup [3; a]$.

ПРИМЕР 3. Для каждого *a* решите уравнение $\sqrt{2x(a-2)+5-a^2} = x-2$.

♦ Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ 2x(a-2)+5-a^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = a-1, \\ x = a+1. \end{array} \right. \end{cases}$$

$a-1 \ge 2$ при $a \ge 3$; $a+1 \ge 2$ при $a \ge 1$.



Таким образом, видим, что при $a < 1$ корней нет; при $1 \le a < 3$ уравнение имеет один корень $x = a + 1$; при $a \ge 3$ уравнение имеет два корня $x = a - 1$ и $x = a + 1$.

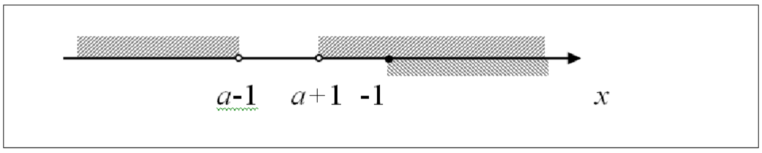
Ответ: при $a < 1$ корней нет; при $1 \le a < 3$ $x = a + 1$; при $a \ge 3$ $x = a \pm 1$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство $\sqrt{x+1} < \sqrt{x^2 - 2ax + x + a^2}$ выполняется для любого допустимого *x*.

♦ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \ge -1, \\ x^2 - 2ax + a^2 - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1, \\ x \in (-\infty;\ a-1) \cup (a+1; +\infty). \end{cases}$$

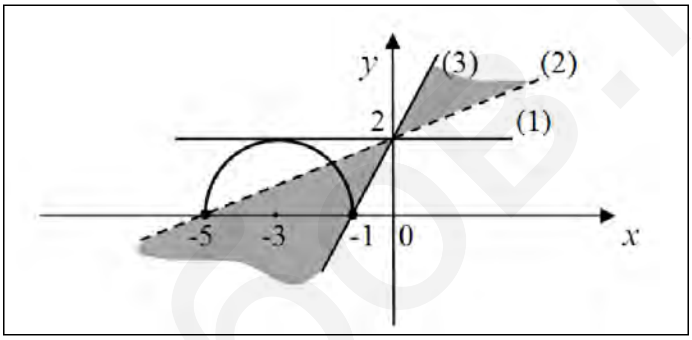
Решением системы будет любое допустимое x ($x \ge -1$) тогда и только тогда, когда $[-1; +\infty) \subset (-\infty;\ a-1) \cup (a+1; +\infty)$. Выполнение этого условия возможно только при $a+1 < -1$, откуда находим $a < -2$.



Ответ: $a < -2$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{-x^2-6x-5} = ax+2$ имеет ровно один корень.

♦ Данное уравнение приводится к виду $\sqrt{4-(x+3)^2} = ax+2$. Выясним, при каких значениях параметра a прямая $y=ax+2$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y=\sqrt{4-(x+3)^2}$. Последнее равенство равносильно системе $\begin{cases} y \ge 0, \\ (x+3)^2+y^2=4. \end{cases}$ Эта система на координатной плоскости задает полуокружность (так как $y \ge 0$) с центром в точке (-3; 0) и радиусом 2.



1) Приведенное положение прямой, очевидно, соответствует $a=0$.
2) Подставив в уравнение прямой $y=ax+2$ точку (-5; 0), находим $a=0{,}4$.
3) Подставив в уравнение прямой $y=ax+2$ точку (-1; 0), находим $a=2$.

По графику видим, что прямая и полуокружность имеют единственную общую точку при $a=0$ или $0{,}4<a\le 2$.

Ответ: $a=0$ или $0{,}4<a\le 2$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x^2+ax+2a+10} = x-1$ не имеет корней.

♦ <u>1-й способ.</u> Данное уравнение (обозначим его (1)) равносильно системе

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ 2x^2+ax+2a+10=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, & (2) \\ x^2+(a+2)x+2a+9=0. & (3) \end{cases}$$

Уравнение (1) не имеет корней тогда и только тогда, когда не имеет решений полученная система. Это возможно в двух случаях:

а) квадратное уравнение (3) не имеет корней;

б) корни уравнения (3) не удовлетворяют условию (2).

Найдем все значения *a*, при которых выполним хотя бы один случай:

а) уравнение $x^2+(a+2)x+2a+9=0$ не имеет коней, если $D<0$:

$a^2-4a-32<0,\quad a\in(-4;8)$;

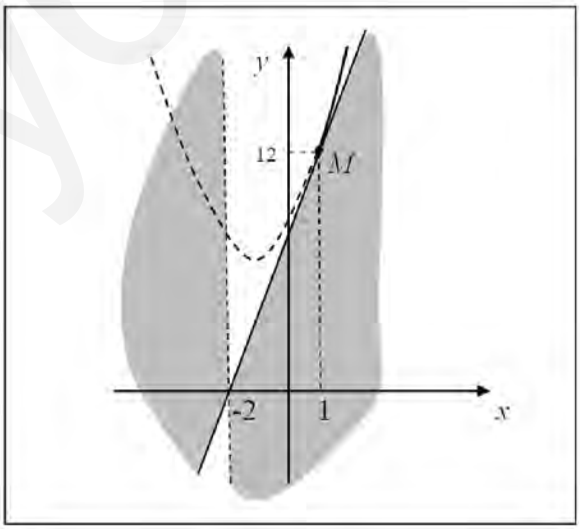
б) корни уравнения $x^2+(a+2)x+2a+9=0$ меньше 1, если его больший корень меньше 1:

$$\frac{-a-2+\sqrt{a^2-4a-32}}{2}<1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-4a-32}<a+4 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a-32\geq 0, \\ a+4>0, \\ a^2-4a-32<(a+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[8;+\infty).$$

Объединяя множества значений параметра *a,* найденные для случаев (а) и (б), получим ответ: $a\in(-4;+\infty)$.

♦ <u>2-й способ.</u> Рассмотрим графический подход к решению этой задачи.

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ 2x^2+ax+2a+10=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x^2+2x+9=-a(x+2). \end{cases}$$



Найдем все значения *a*, при которых прямая $y=-a(x+2)$, не имеет общих точек с параболой $y=x^2+2x+9$ на промежутке $[1;+\infty)$. (На рисунке таким прямым соответствует закрашенная часть плоскости).

Для прямой $y = -a(x+2)$ угловой коэффициент равен $-a$. При $a \le a_0$ прямая и парабола имеют общие точки на промежутке $[1;+\infty)$. При $a > a_0$ общих точек нет. Значение a_0 найдем из условия, что прямая $y = -a_0(x+2)$ проходит через точку $M(1;12)$. Имеем $a_0 = -4$.

Ответ: $a > -4$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение (неравенство)

а) $\sqrt{x} = a$; б) $\sqrt{x} > a$; в) $\sqrt{x} \le a$;

г) $(x-a)\sqrt{x} = 0$; д) $\sqrt{x} \ge \sqrt{x-a}$; е) $x\sqrt{x-a} = 0$.

№ 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{19x^2-(9a+2)x+a^2+1} = x-1$ не имеет корней.

№ 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{a-2(a+1)x} = x-1$ имеет ровно один корень.

№ 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-7x^2-2(a-5)x+2a+6} = x^2-4$ имеет хотя бы один корень.

№ 5. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций $f(x) = \sqrt{15+2x-x^2}$ -$5a$ и $g(x) = ax+3$ имеют ровно одну общую точку.

№ 6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a^2+a+3-3\cos^2 x-(3a+2)\sin x} = -\sin x$ не имеет корней.

№ 7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{2a\sin x+1} > \sqrt{\sin^2 x+a^2}$ не имеет решений.

№ 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет ровно два корня.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(a+4)x+a-8} = x-1$ имеет два различных корня.

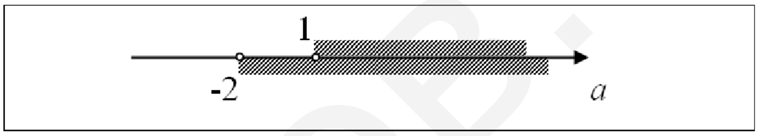
№ 10. Для каждого значения a решите неравенство $(a+x)\sqrt{9-x^2} \ge 0$.

§9. Показательные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $25^x-(2a+1)\cdot 5^x+a^2+a-2=0$.

♦ После замены $y=5^x$ ($y>0$) данное уравнение сводится к квадратному $y^2-(2a+1)\cdot y+a^2+a-2=0$, которое равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} y=a-1, \\ y=a+2. \end{array}\right.$

Таким образом, имеем $\left[\begin{array}{l} 5^x=a-1, \\ 5^x=a+2. \end{array}\right.$ Первое уравнение совокупности имеет решение при $a>1$. Его корень $x=\log_5(a-1)$. Второе уравнение совокупности имеет решение при $a>-2$. Его корень $x=\log_5(a+2)$.



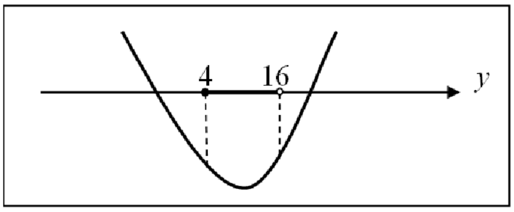
Ответ: при $a\le -2$ корней нет; при $-2<a\le 1$ $x=\log_5(a+2)$;

при $a>1$ $x=\log_5(a-1)$ и $x=\log_5(a+2)$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^{\sqrt{3x+1}}+(8a-22)\cdot 2^{\sqrt{3x+1}}-40a+8<0$ выполняется для любого значения x из промежутка $[1;\,5)$.

♦ Пусть $y=2^{\sqrt{3x+1}}$, тогда исходное неравенство (обозначим его (1)) примет вид $y^2+(8a-22)y-40a+8<0$ (2). Из условия $1\le x<5$, получим: $4\le 3x+1<16$, $2\le\sqrt{3x+1}<4$, $4\le 2^{\sqrt{3x+1}}<16$.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для любого значения x из промежутка $[1;\,5)$, когда для любого значения y из промежутка $[4;\,16)$ выполняется квадратное неравенство (2). Последнее требование имеет место лишь в том случае, если меньший корень квадратичной функции $f(y)=y^2+(8a-22)y-40a+8$ меньше 4, а больший корень не меньше 16.



Искомые значения параметра находим из системы $\begin{cases} f(4) < 0, \\ f(16) \le 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 16 + 32a - 88 - 40a + 8 < 0, \\ 256 + 128a - 352 - 40a + 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -8, \\ a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < a \le 1.$$

Ответ: (– 8; 1].

ПРИМЕР 3. Найдите все значения *a*, при каждом из которых неравенство $9^{\cos x} - 2a \cdot 3^{\cos x} + a^2 - 9 \ge 0$ выполняется для любого допустимого значения *x*.

♦ $9^{\cos x} - 2a \cdot 3^{\cos x} + a^2 - 9 \ge 0$ (1). Пусть $y = 3^{\cos x}$, причем $E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Неравенство (1) примет вид $y^2 - 2ay + a^2 - 9 \ge 0$ (2).

Исходное неравенство выполняется для любого *x* тогда и только тогда, когда неравенство (2) выполняется для любого $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Решением квадратного неравенства (2) будут $y \in (-\infty; a-3] \cup [a+3; +\infty)$.

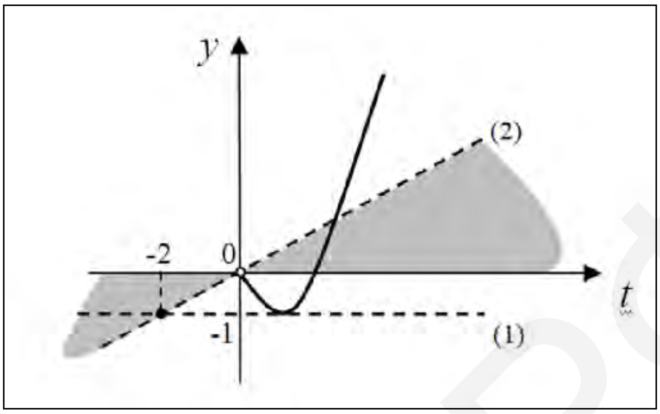
Таким образом, необходимо, чтобы промежуток $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ целиком содержался во множестве решений неравенства (2). Это достигается, если $3 \le a - 3$ или $a + 3 \le \frac{1}{3}$, откуда $a \ge 6$ или $a \le -\frac{8}{3}$.

Ответ: $a \le -\frac{8}{3}$ или $a \ge 6$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $4^x - 2^{x+1} - a \cdot 2^x = 2a - 1$ имеет два различных корня.

♦ Перепишем исходное уравнение в виде $4^x - 2 \cdot 2^x = a \cdot (2^x + 2) - 1$ (1). Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда уравнение примет вид $t^2 - 2t = a(t+2) - 1$ (2).

Уравнение (1) имеет два различных решения, если уравнение (2) имеет два различных положительных корня. Найдем значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = a(t+2) - 1$ имеет ровно две общие точки с частью параболы $y = t^2 - 2t$, где $t > 0$ (закрашенная область).



Положение прямой (1) достигается при a=0. Положение прямой (2) определяется ее прохождением через начало координат. В этом случае $0 = a(0+2) - 1$, a=0,5.

Ответ: 0<a<0,5.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $16^x - 12 \cdot 4^x = a^2 - 2a - 35$ имеет ровно один корень. Укажите этот корень.

№ 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $121^x - 3a \cdot 11^x + a^2 - 4 = 0$ имеет ровно два корня.

№ 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $16^x - 2a \cdot 4^x - a + 20 = 0$ не имеет корней.

№ 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{|x-1|} + (a-1) \cdot 2^{|x-1|} - 2a - 1 = 0$ не имеет корней.

№ 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^{4x-x^2-3} - 2a \cdot 3^{4x-x^2-3} + a^2 - 1 = 0$ имеет хотя бы один корень.

№ 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(4a+1) \cdot 9^x - 2(a+2) \cdot 3^x + 3a - 2} = 2 - 3^x$ имеет ровно два корня.

№ 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $25^{|\sin x|} - 2a \cdot 5^{|\sin x|} + a^2 - 4 > 0$ имеет хотя бы одно решение.

№ 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^{|x-1|} + (a-1) \cdot 2^{|x-1|} - 2a - 1 > 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x-1| \geq 2$.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a+1) \cdot 3^x + a + 1 > 0$ верно при любом значении x.

№ 10. Для каждого значения параметра a решите неравенство $4^x - (2a+1) \cdot 2^x + a^2 + a < 0$.

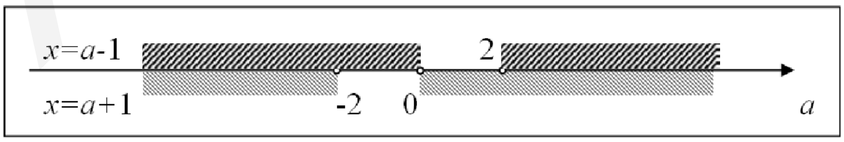
§10. Логарифмические уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_8(x^2 - 1) = \log_8(2ax - a^2)$.

♦ Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 2ax - a^2, \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a - 1, \\ x = a + 1, \end{array} \right. \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

$x = a - 1$ удовлетворяет условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, если $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; $x = a + 1$ удовлетворяет условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, если $a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.



Итак, видим, что при $a < -2$ и $a > 2$ уравнение имеет два корня: $x = a - 1$, $x = a + 1$; при $-2 \leq a < 0$ уравнение имеет один корень $x = a - 1$; при $a = 0$ корней нет; при $0 < a \leq 2$ уравнение имеет один корень $x = a + 1$.

Ответ: при $a < -2$ и $a > 2$ $x = a - 1$ или $x = a + 1$;

при $-2 \leq a < 0$ $x = a - 1$; при $0 < a \leq 2$ $x = a + 1$; при $a = 0$ корней нет.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \log_3(x+|x|)=\log_3 y, \\ x^2-ay+6a-8=0 \end{cases}$ имеет два различных решения.

◆ Из условия существования логарифма следует: что $x + |x| > 0$, что выполнимо только при $x > 0$. Тогда, имеем:

$$\begin{cases} x>0, \\ \log_3 2x=\log_3 y, \\ x^2-ay+6a-8=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ 2x=y, \\ x^2-ay+6a-8=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ 2x=y, \\ x^2-2ax+6a-8=0. \end{cases}$$

Исходная система имеет два решения, если квадратное уравнение $x^2-2ax+6a-8=0$ имеет два различных положительных корня.

Пусть x_1 и x_2 – различные корни этого уравнения, причем $x_1>0$ и $x_2>0$; По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 6a-8$; $x_1+x_2=2a$. Кроме того, $D_1=a^2-(6a-8)$.

Условие задачи выполняется, если

$$\begin{cases} D_1>0, \\ x_1\cdot x_2>0, \\ x_1+x_2>0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-6a+8>0, \\ 6a-8>0, \\ 2a>0; \end{cases} \quad \begin{cases} a\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty), \\ a\in\left(\frac{4}{3};+\infty\right), \\ a\in(0;+\infty); \end{cases} \quad a\in\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(4;+\infty).$$

Ответ: $a\in\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(4;+\infty)$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(12x-x^2-32)=\lg(ax-7)$ имеет ровно один корень.

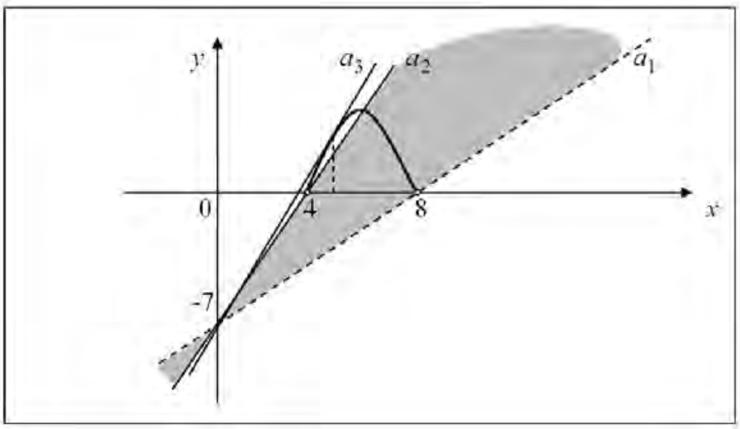
◆ Уравнение $\lg(12x-x^2-32)=\lg(ax-7)$ равносильно системе

$$\begin{cases} 12x-x^2-32>0, \\ 12x-x^2-32=ax-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x<8, \\ 12x-x^2-32=ax-7. \end{cases}$$

Дальше решение проведем графическим способом: найдем все значения параметра a, при которых прямая $y=ax-7$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y=-x^2+12x-32$ на интервале (4; 8).

Видим, что искомые значения параметра $a\in(a_1;\ a_2]\cup\{a_3\}$.

Значение a_1 находим из уравнения $0=8a_1-7$; $a_1=\frac{7}{8}$.



Значение a_2 находим из уравнения $0 = 4a_2 - 7$; $a_2 = \dfrac{7}{4}$.

Значение a_3 соответствует моменту касания прямой $y = ax - 7$ графика функции $y = -x^2 + 12x - 32$. Для нахождения a_3 необходимо потребовать, чтобы уравнение $-x^2 + 12x - 32 = a_3 \cdot x - 7$ имело ровно один корень.

Имеем $x^2 - (a_3 - 12)x + 25 = 0$; $D = 0$ при $a_3 = 2$ или $a_3 = 22$.

Если $a_3 = 22$, то $x = -5$, что не удовлетворяет условию $4 < x < 8$.

Если $a_3 = 2$, то $x = 5$. Это значение удовлетворяет условию $4 < x < 8$.

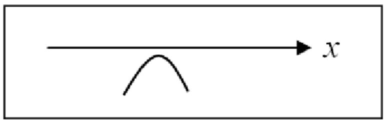
Ответ: $a \in \left(\dfrac{7}{8}; \dfrac{7}{4}\right] \cup \{2\}$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\lg(ax^2 + 4x + a) \geq \lg(5x^2 + 5)$ не имеет решений.

♦ Исходное неравенство равносильно неравенству $ax^2 + 4x + a \geq 5x^2 + 5$, откуда $(a-5)x^2 + 4x + a - 5 \geq 0$.

Если $a = 5$, то решением неравенства является любое $x \geq 0$.

Если $a \neq 5$, то последнее неравенство не имеет решений тогда и только тогда, когда выполняется система $\begin{cases} a - 5 < 0, \\ D < 0. \end{cases}$



$D_1 = 4 - (a-5)^2 = -(a-7)(a-3)$. Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} a - 5 < 0, \\ -(a-7)(a-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5, \\ a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a < 3.$$

Ответ: $a < 3$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_7(21a+59-a^2+\sin 2x+\sqrt{\sin^2 2x})=\log_7(3a+5)+1$ имеет ровно три корня на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{13\pi}{12}\right)$.

♦ $\log_7(21a+59-a^2+\sin 2x+\sqrt{\sin^2 2x})=\log_7(3a+5)+1 \Leftrightarrow$

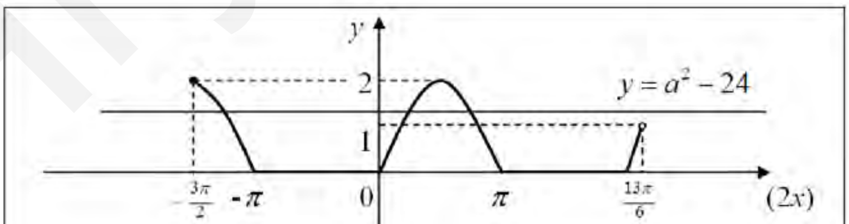
$\Leftrightarrow \log_7(21a+59-a^2+\sin 2x+\sqrt{\sin^2 2x})=\log_7(21a+35) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21a+35>0, \\ 21a+59-a^2+\sin 2x+\sqrt{\sin^2 2x}=21a+35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\frac{5}{3}, \\ \sin 2x+|\sin 2x|=a^2-24. \end{cases}$$

Дальше определим графически, при каких значениях параметра a прямая $y=a^2-24$ $\left(a>-\frac{5}{3}\right)$ имеет ровно три общих точки с графиком функции $y=\sin 2x+|\sin 2x|$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{13\pi}{12}\right)$.

Для построения графика функции $y=\sin 2x+|\sin 2x|$ раскроем модуль: $y=\begin{cases} 2\sin 2x, \text{ если } \sin 2x\ge 0; \\ 0, \text{ если } \sin 2x<0. \end{cases}$

Построим график этой функции в системе координат ($2x$; y). В этом случае $(2x)\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{13\pi}{6}\right)$.



Видим, что искомые значения параметра удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a>-\frac{5}{3}, \\ 1\le a^2-24<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\frac{5}{3}, \\ a\in(-\sqrt{26};-5]\cup[5;\sqrt{26}) \end{cases} \Leftrightarrow a\in[5;\ \sqrt{26}).$$

Ответ: $a\in[5;\ \sqrt{26})$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения a решите неравенство $\log_{3-a}(x+a) \geq 0$.

№ 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{2a+1}(4\sin x + 5 + 4a) = 2$ имеет 5 корней на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№ 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(4x^2 - 6ax - x - 8a^2 + 12) = \lg(x+4) + \lg(3-x)$ имеет ровно 2 корня.

№ 4. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка [3; 9) значение выражения $\log_3^2 x - 7$ не равно значению выражения $(a-4)\cdot\log_3 x$.

№ 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(3x - x^2) = \lg(3x - 2ax + a^2 - 1)$ имеет ровно один корень.

№ 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = \log_2\left(3 - \frac{|x|}{x}\right), \\ y - |x| = a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№ 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \log_4\left(-\frac{x}{|x|}\right) = y - 2x, \\ x^2 - ay - 7a - 12 = 0 \end{cases}$ имеет два различных решения.

№ 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\lg(3x - x^2) \leq \lg(3x - 2ax + a^2 - 4)$ имеет хотя бы одно решение.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{0,5}(4x - x^2) \geq \log_{0,5}(4x + ax + 3a)$ не имеет решений.

№ 10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_x(4^x - 6 \cdot 2^x - a) = 0$ имеет ровно один корень, удовлетворяющий неравенству $|x - 1| \leq 1$.

§11. Свойства функций в задачах с параметром

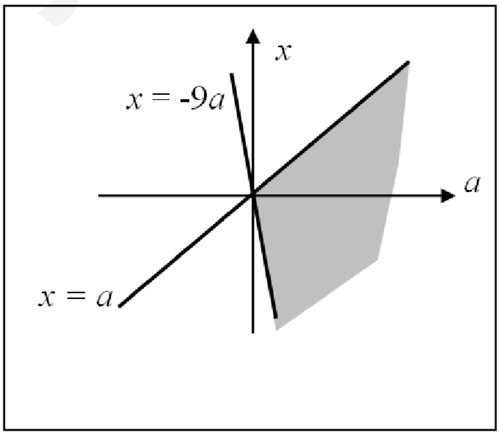
ПРИМЕР 1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3^{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2+x}=3^{a-x}+\sqrt[3]{a-x}$ имеет ровно один корень.

◆ Рассмотрим функцию $f(t)=3^t+\sqrt[3]{t}$. Эта функция возрастает на R (как сумма двух возрастающих функций). Исходное уравнение имеет вид $f(x^2+x)=f(a-x)$. Оно будет равносильно уравнению $x^2+x=a-x$.

Ясно, что требование задачи выполняется, когда дискриминант квадратного уравнения $x^2+2x-a=0$ равен нулю. $D_1=1+a$; $D_1=0$ при a=-1.
Ответ: – 1.

ПРИМЕР 2. Решите неравенство $\sqrt{x+9a}-\sqrt{10a}\le a-x$.

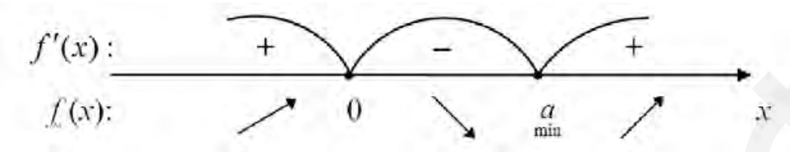
◆ Перепишем неравенство в виде $\sqrt{x+9a}+x\le\sqrt{a+9a}+a$ (1).
Так как функция $f(t)=\sqrt{t+9a}+t$ возрастает на всей своей области определения $D(f)=[-9a;+\infty)$, то неравенство (1) равносильно системе $\begin{cases} x\le a, \\ x\ge -9a \end{cases}$. Найдём решение полученной системы с помощью координатной плоскости Oax. Все решения системы задают на координатной плоскости Oax один из четырёх углов, полученных при пересечении прямых $x=a$ и $x=-9a$.



Видим, что при $a<0$ решений нет; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ $x\in[-9a;a]$.
Ответ: при $a<0$ решений нет; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ $x\in[-9a;a]$.

ПРИМЕР 3. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3ax^2+5$ на отрезке [1; 3] не меньше, чем -3.

♦ <u>I способ.</u> (Аналитический). $f'(x)=6x^2-6ax$. Из уравнения $6x^2-6ax=0$ находим критические точки функции: x=0 или x=a. Во-первых, заметим, что $0\notin[1;3]$. Во-вторых, x=a ($a>0$) – точка минимума функции (рис.).



I. Если $a\in[1;3]$, то наименьшее значение функция принимает в точке a. Следовательно, должно выполняться неравенство $f(a)\geq-3$: $2a^3-3a^3+5\geq-3$, откуда $a\leq2$. Таким образом, этому случаю удовлетворяют все $a\in[1;2]$.

II. Если $a\notin[1;3]$, т.е. $a\in(0;1)\cup(3;+\infty)$, то наименьшее значение функция принимает либо в точке x=1, либо в точке x=3. Независимо от того, какая это точка, должна выполняться система неравенств $\begin{cases} f(1)\geq-3, \\ f(3)\geq-3. \end{cases}$

Имеем $\begin{cases} 2-3a+5\geq-3, \\ 54-27a+5\geq-3; \end{cases}$ $\begin{cases} a\leq\dfrac{10}{3}, \\ a\leq\dfrac{62}{7}; \end{cases}$ $a\leq\dfrac{62}{7}$. С учетом условия $a\in(0;1)$.

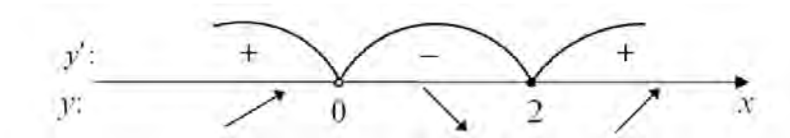
Объединяя решения из пунктов (I) и (II), получим $a\in(0;2]$.

<u>II способ.</u> (Графический). Так как наименьшее значение функции на отрезке [1; 3], не меньше, чем -3, то значения функции *во всех точках* отрезка также не меньше, чем -3. Следовательно, неравенство $2x^3-3ax^2+5\geq-3$ должно выполняться для любого $x\in[1;3]$. Полученное неравенство перепишем в виде $2x^3+8\geq3ax^2$, откуда $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{8}{3x^2}\geq a$.

Выясним, при каких значениях a прямая y=a будет располагаться <u>*не выше*</u> графика функции $y=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{8}{3x^2}$, построенного на отрезке [1; 3].

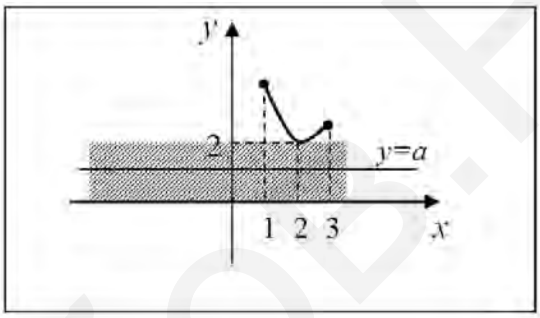
Проведем исследование функции $y=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{8}{3x^2}$ с помощью производной:

$y'=\dfrac{2}{3}-\dfrac{16}{3x^3}=\dfrac{2(x^3-8)}{3x^3}$. $y'=0$ при x=2. $y(1)=\dfrac{10}{3}$, $y(2)=2$, $y(3)=\dfrac{62}{27}$.



Далее изобразим график функции $y=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{8}{3x^2}$ на отрезке [1; 3].

По графику видим, что требованию удовлетворяет любая прямая $y=a$, для которой $a\in(0;2]$.



Ответ: $a\in(0;2]$.

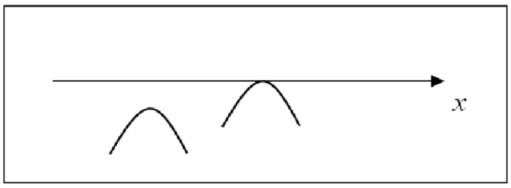
Замечания. *1) Любые другие графические интерпретации, такие как* $2x^3+8\ge 3ax^2$ *или* $x^3\ge\dfrac{3a}{2}x^2-4$*, были бы весьма неудачны. В них пришлось бы рассматривать взаимное расположение обычной параболы и кубической. Не намного лучше выглядит графическая интерпретация вида* $2x^2+\dfrac{8}{x}\ge 3ax$*. В этом случае пришлось бы выяснять, при каком значении а прямая* $y=3ax$ *является касательной к графику функции* $y=2x^2+\dfrac{8}{x}$.

2) Сравнивая оба способа решения (аналитический и графический), можно констатировать, что в данной ситуации предпочтительнее выглядит первый.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=ax^3-30x^2+3ax-1$ будет убывающей на всей области определения.

♦ $f'(x)=3ax^2-60x+3a$. Функция будет убывающей, если для любого x выполняется условие $f'(x)\le 0$: $3ax^2-60x+3a\le 0$, $ax^2-20x+a\le 0$.

Последнее неравенство будет верно при любом значении x, если $\begin{cases} a < 0, \\ D \le 0. \end{cases}$



Имеем $\begin{cases} a < 0, \\ 100 - a^2 \le 0, \end{cases}$ $\quad a \le -10.$

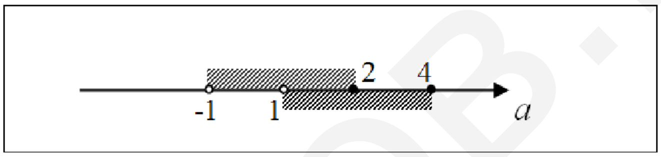
Ответ: $a \le -10.$

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 3x + 1$ имеет ровно один экстремум на промежутке (0;3].

♦ $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 3$. $f'(x) = 0$ при x=a-1 или x=a+1. Очевидно, что обе найденные точки будут являться точками экстремума данной функции.

Выясним, при каких значениях a только одна из них попадает в промежуток (0;3].

1) $0 < a - 1 \le 3,\ 1 < a \le 4$. 2) $0 < a + 1 \le 3,\ -1 < a \le 2$.

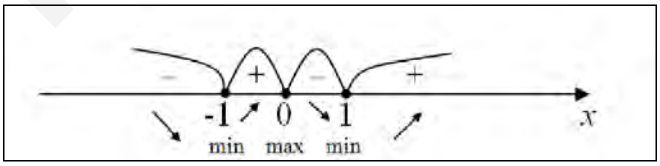


Видим, что искомые значения $-1 < a \le 1,\quad 2 < a \le 4$ (одна штриховка).

Ответ: $-1 < a \le 1,\quad 2 < a \le 4$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $3x^4 - 6x^2 - a = 0$ имеет ровно один корень на промежутке (-1; 2).

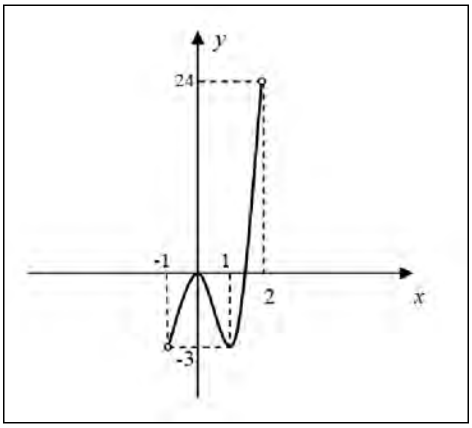
♦ Приведем уравнение к виду $3x^4 - 6x^2 = a$. Исследуем функцию $y = 3x^4 - 6x^2$.
$y' = 12x^3 - 12x$; $y' = 0$ при x=0 или x=±1. При этом y(0)=0, y(-1)=-3, y(1)=-3



На координатной плоскости изобразим график функции $y = 3x^4 - 6x^2$, где $x \in (-1; 2)$. Заметим, что y(2)=24.

По графику видим, что уравнение $3x^4 - 6x^2 = a$ имеет ровно один корень при a=-3 или 0<a<24.

Ответ: a=-3, 0<a<24.



УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(0{,}1)^{x^2-x} - \sqrt[5]{x^2-x} = 10^{2x-a} + \sqrt[5]{2x-a}$ не имеет корней.

№ 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(x^2+a) - \cos ax = ax - x^2 - a$ имеет единственный корень.

№ 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $6\sin^3 x = a - 5\cos 2x$ не имеет корней.

№ 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^3 + 1 = 3x^2 + a$ имеет два различных действительных корня.

№ 5. Решите неравенство $\sqrt{x-5a} - \sqrt{-4a} \le 4a - 4x$.

№ 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4ax + 5a^2$ на отрезке, заданном неравенством $|x| \le 6$, больше 8.

№ 7. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a$ на отрезке [-3; 1] не превосходит –5.

№ 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3ax - 2$ будет возрастающей на всей области определения.

№ 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^3 - 12x - 2$ имеет ровно один экстремум на промежутке (a-5; a].

№ 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^3 + ax^2 - ax$ не имеет экстремумов.

Ответы

§ 1

№1. б) при a=0 и a=1 числа равны; при a<0 и a>1 первое число меньше; при 0<a<1 первое число больше.

№2. б) при a=2 решений нет; при a=-2 $x \in R$; при $a \neq \pm 2$ $x = \dfrac{a+1}{a-2}$;

г) при a=-2 и a=0 решений нет; при a=2 $x \in R$; при $a \neq \pm 2,\ a \neq 0$ $x = \dfrac{a+1}{a+2}$;

е) при a<3 решений нет; при a=3 x=-1; при a>3 x=2-a или x=a-4;
з) при a<-2 решений нет; при a=-2 x=0; при -2<a<2 $x = \pm(a+2)$; при $a = 2$ $x = \pm 4$ или x=0; при a>2 $x = \pm(a+2)$ или $x = \pm(a-2)$.

№3. б) при a=1 $x \in R$; при a<1 $x \geq \dfrac{3}{a-1}$; при a>1 $x \leq \dfrac{3}{a-1}$; **г)** при a=0 решений нет; при a=3 $x \in R$; при 0<a<3 $x \geq \dfrac{a+2}{a-3}$; при a<0 и a>3 $x \leq \dfrac{a+2}{a-3}$;
е) при a=0 решений нет; при a>0 x>a; при a<0 x<a; **з)** при a=± 2 решений нет; при a=0 $x \in R$; при a<-2 и 0<a<2 $x < \dfrac{a^2+4}{a}$; при -2<a<0 и a>2 $x > \dfrac{a^2+4}{a}$.

№4. в) при a=-1, $b \leq 1$ $x \in R$; при a=-1, b>1 решений нет; при a<-1 $x \leq \dfrac{b-1}{a+1}$; при a>-1 $x \geq \dfrac{b-1}{a+1}$; **г)** при a=b=0 $x \in R$; при $a \neq 0$ или $b \neq 0$ $x = b^2 - a^2$.

№5. б) при a=2 решений нет; при a=-2 бесконечно много решений вида (t; 2+2t), где $t \in R$; при $a \neq -2$ и $a \neq 2$ одно решение $\left(\dfrac{2}{a-2}; \dfrac{4}{2-a}\right)$.

№6. При $a < -1$ $x = \dfrac{2-4a}{a-1}$, $x = -\dfrac{2+4a}{a+1}$. **№7.** (-1; 1]. **№8.** $a \geq 1$. **№9.** $a \leq -1$.

№10. При a<0 корней нет; при a=0 x=0; при a>0 $0 \leq x \leq a$.

§ 2

№1. б) при a=2 x=2; при a=3 x=3; при 2<a<3 решений нет; при a<2 и a>3 $x = a \pm \sqrt{a^2 - 5a + 6}$; **г)** при a=$\dfrac{4}{3}$ x=2; при a=$-\dfrac{4}{3}$ x=-2; при $-\dfrac{4}{3}$<a<$\dfrac{4}{3}$ решений нет; при a<$-\dfrac{4}{3}$ и a>$\dfrac{4}{3}$ $x = \dfrac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 16}}{2}$;

е) при a=0 x=-0,5; при a=1 x=-1; при a>1 решений нет; при a<0 и 0<a<1 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

№2. **а)** при a=1 и a=0,2 один корень; при a<0,2 корней нет; при 0,2<a<1 и a>1 два корня.

№3. б) при $a < 4$ $x \in (-\infty; a-2) \cup (6-a; +\infty)$; при a=4 $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; при $a > 4$ $x \in (-\infty;\ 6-a) \cup (a-2; +\infty)$;

г) при a=0 x<-1; при $0 < a < \frac{1}{4}$ $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} \right)$; при a<0 $x \in \left(-\infty; \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} \right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}; +\infty \right)$; при $a \geq \frac{1}{4}$ решений нет;

е) при a=0 решений нет; при a>0 $x \in (-\infty; a) \cup (a+1; +\infty)$; при a<0 $x \in (a;\ a+1)$.

№4. **а)** a<-1; **б)** $0 < a \leq 1,\ a = \frac{5}{4},\ 3 \leq a < 10$; **в)** a=3; **г)** a<$\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$; **д)** $a \leq -1$.

№5. при a<-2 решений нет; при a=-2 x=0; при -2<a<2 $x = \pm(a+2)$; при $a = 2$ $x = \pm 4$ или x=0; при a>2 $x = \pm(a+2)$ или $x = \pm(a-2)$.

§ 3

№1. при a=-5 числа равны; при a<-5 и -1<a<1 первое число меньше; при -5<a<-1 и a>1 первое число больше.

№2. **а)** при a=0 и a=1 решений нет; при $a \neq 0,\ a \neq 1$ x=a-1; **б)** при a=-1 решений нет; при $a \neq -1$ x=-a; **в)** при a=1 решений нет; при $a \neq 1$ x=a; **г)** при a=-1 и a=0 решений нет; при $a \neq -1,\ a \neq 0$ $x = \frac{a}{a+1}$; **д)** при $a = \pm 1$ решений нет; при a=0 x=0; при $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; при $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; при $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ a \neq \pm 1,\ a \neq 0$ x=a, $x = \frac{1}{a} - a$; **е)** при a=2 x=1; при

$a=-2$ $x=-1$; при $a=6$ $x=7$; при $a \neq \pm 2$, $a \neq 6$ $x=a+1$, $x=\frac{a}{2}$; **ж)** при $a=3$ решений нет; при $a=1$ $x=1$; при $a=-3$ $x=9$; при $a=0$ $x=0$; при $a \notin \{\pm 3; 0; 1\}$ $x=a$, $x=3-2a$; **з)** при $a=-3$ $x=-6$; при $a=2{,}5$ $x=-0{,}5$; при $a=-2{,}5$ $x=-5{,}5$; при $a=8$ $x=16$; при $a=-2$ $x=-4$; при $a \notin \{\pm 2{,}5; -3; -2; 8\}$ $x=2a$, $x=a-3$.

№3. **а)** при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $0 < x \le a$; при $a<0$ $a \le x < 0$;
б) при $a=0$ решений нет; при $a<0$ $x \in (-1; 0) \cup (-a; +\infty)$; при $0<a<1$ $x \in (-\infty; -1) \cup (-a; 0)$; при $a \ge 1$ $x \in (-\infty; -a) \cup (-1; 0)$;
в) при $a<-1$ и $a>1$ $x \in (-1; 1) \cup \{a\}$; при $-1 \le a \le 1$ $x \in (-1; 1)$.
г) при $a=0$ $x<0$; при $a>0$ $x \in (-\infty; 0) \cup [\frac{1}{a}; +\infty)$; при $a<0$ $x \in [\frac{1}{a}; 0)$;
д) при $a=-4$ решений нет; при $a>-4$ $-8 \le x < 2a$; при $a<-4$ $2a < x \le -8$;
е) при $a<0$ $3a < x < 0$, $x \ge 12$; при $a=0$ $x \ge 12$; при $0<a<4$ $0 < x < 3a$, $x \ge 12$; при $a=4$ $0 < x < 12$, $x > 12$; при $a>4$ $0 < x \le 12$, $x > 3a$.

§ 4

№1. $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right)$. **№2.** $(-\infty; -15) \cup (-3; 9)$. **№3.** 0. **№4.** (1; 5).
№5. (-3; 5). **№6.** $a \ge 9$. **№7.** 3. **№8.** -4. **№9.** $a>3$. **№10.** $a < -3$.
№11. $[-7; -6) \cup (2; 3]$. **№12.** $(-2; -1] \cup [4; 5)$. **№13.** $(0; 1) \cup (1; 1{,}2)$.
№14. -7; $-\frac{109}{7}$. **№15.** $-\frac{20}{7}$; $-\frac{20}{13}$.

§ 5

№1. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [4; +\infty)$. **№2.** $[1; 3)$. **№3.** $a<-2$. **№4.** $a > \frac{10}{7}$.
№5. $\left[-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$. **№6.** $\left[-\frac{16}{7}; -2\right)$. **№7.** $a \ge 2$. **№8.** $a \ge 9$.
№9. $a \ge \frac{1}{3}$. **№10.** $a=-1$. **№11.** $(\frac{7}{4}; 2]$. **№12.** $(-4; -2] \cup \{-0{,}5\} \cup [1; 3)$.
№13. $(-\infty; -4] \cup [0; \frac{4}{3})$. **№14.** $(-\frac{4}{3}; 0] \cup [4; +\infty)$. **№15.** $(-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.

§6

№1. (0; 3). **№2. а)** при $a > 1$ корней нет; при $a = 1$ и $a < 0$ два корня; при $a = 0$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня; **б)** при $a < -2$ корней нет; при $a = -2$ один корень; при $-2 < a < 2$ два корня; при $a = 2$ три корня; при $a > 2$ четыре корня. **№3.** [-1; 1). **№4.** a=4. **№5.** a=3 или $a = 2 + \sqrt{41}$. **№6.** a=3 или $a = -\frac{11}{3}$. **№7.** $-22 < a < -\frac{2}{3}$. **№8.** $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$.

№9. $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\right)$. **№10.** $(-1;0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; 4\right)$. **№11.** $a = -4\sqrt{2}$ или -3<a<3.

№12. $[1-\sqrt{5}; 0) \cup [2; 1+\sqrt{5}]$. **№13.** -1,5. **№14.** a=1 или $a = -\sqrt{10}$. **№15.** (1; 2].

№16. a=0 или a=2,25. **№17.** $\left(-\frac{17}{8}; 1\right)$. **№18.** (0,75; 2). **№19.** $(1{,}5; 6 + 2\sqrt{5})$.

№20. $\left(-\infty; -12 - 2\sqrt{30}\right) \cup \left(-0{,}5; +\infty\right)$.

§ 7

№1. б) при a<1 корней нет; при $1 \le a < 3$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{a+1} + \pi n,\ n \in Z$;

при $a \ge 3$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{a+1} + \pi n,\quad x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{1-a} + \pi n,\ n \in Z$;

г) при a=0 $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, при $a \ne 0$ корней нет.

№2. $-8\pi < a < -6\pi$, $6\pi < a < 8\pi$. **№3.** a<-2, 0<a<1, a>3. **№4.** $a < -\frac{4}{3}$, $a > 0$.

№5. a<-4, a>1. **№6.** a=0,5. **№7.** $-1 \le a < 0$. **№8.** a=2. **№9.** a=2, a=3.

№10. в) При a>1 $\frac{1}{a-1}\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \le x < \frac{1}{a-1}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right),\quad n \in Z$;

при a<1 $\frac{1}{a-1}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) < x \le \frac{1}{a-1}\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right),\quad n \in Z$; при a=1 решений нет.

§ 8

№1. а) при a<0 решений нет; при $a \ge 0$ $x = a^2$; **б)** при $a < 0$ $x \ge 0$; при $a \ge 0$ $x > a^2$; **в)** при a<0 решений нет; при $a \ge 0$ $x \in \left[0; a^2\right]$;

г) при $a>0$ $x=a$, $x=0$; при $a \le 0$ $x=0$; **д)** при $a<0$ решений нет; при $a \ge 0$ $x \ge a$; **е)** при $a<0$ $x=a$, $x=0$; при $a \ge 0$ $x=a$.

№2. $a<3$. **№3.** $a<-2$, $a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **№4.** $a \le \frac{13}{3}$, $a \ge 7$. **№5.** $a=0$, $-2 \le a < -0{,}4$.

№6. $a<-2$, $a>0$. **№7.** $a \le -2$, $a \ge 2$. **№8.** $-0{,}25 < a \le 0$. **№9.** $0 < a \le 2$.

№10. При $a \ge 3$ $-3 \le x \le 3$; при $-3 < a < 3$ $x=-3$, $-a \le x \le 3$; при $a \le -3$ $x = \pm 3$.

§ 9

№1. $a \le -5$, $a=1$, $a \ge 7$. При $a \le -5$ $x=\log_4(7-a)$; при $a=1$ $x=\log_4 6$; при $a \ge 7$ $x=\log_4(5+a)$. **№2.** $a>2$. **№3.** $a<4$. **№4.** $-5<a<-1$.

№5. $-1<a\le 4$. **№6.** $2<a<\frac{24}{11}$. **№7.** $a<3$, $a>3$. **№8.** $a>-5{,}5$. **№9.** $a \ge 0$.

№10. При $a \le -1$ решений нет; при $-1 < a \le 0$ $x < \log_2(a+1)$; при $a>0$ $\log_2 a < x < \log_2(a+1)$.

§ 10

№1. При $a \ge 3$ и $a=2$ $\varnothing$; при $a<2$ $x \ge 1-a$; при $2<a<3$ $-a<x\le 1-a$.

№2. $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;1]$. **№3.** $(-2;0)\cup(0;1{,}5)$. **№4.** $(-\infty;-2)\cup[2{,}5;+\infty)$.

№5. $(-1;1]\cup[2;4)$. **№6.** $a=-2$, $1\le a<\sqrt{2}$. **№7.** $(-\infty;-4)\cup\left(-3;-\frac{12}{7}\right)$.

№8. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **№9.** $\left(-\infty;-\frac{16}{7}\right]$. **№10.** $a=-10$, $-9\le a<-6$.

§ 11

№1. $a<-0{,}25$. **№2.** $a=0$, $a=4$. **№3.** $a<-11$, $a>5$. **№4.** 0; 1. **№5.** При $a<0$ $5a \le x \le a$; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ решений нет. **№6.** $(-\infty;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};+\infty)$.

№7. $(-\infty;-2{,}5]\cup[2+2\sqrt{2};+\infty)$. **№8.** $a \ge 1$. **№9.** $[-2;2)\cup[3;7)$. **№10.** $[-3;0]$.

Приложение

♦ Приведем примерное тематическое планирование изучения раздела "Задачи с параметром" на факультативных занятиях (элективных курсах) в 11-м классе.

Тема занятия:	Часов:
§ 1. Линейные уравнения и неравенства, содержащие параметр………………………………	3
§ 2. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр………………………………	3
§ 3. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр………………………………	3
§ 4. Теорема Виета…………………………………...	3
§ 5. Расположение корней квадратичной функции…..	3
§ 6. Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих параметр……………………	4
§ 7. Тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие параметр………………………………	3
§ 8. Иррациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр………………………………	3
§ 9. Показательные уравнения и неравенства, содержащие параметр.	3
§ 10. Логарифмические уравнения и неравенства, содержащие параметр………………………………	3
§ 11. Свойства функций в задачах с параметром…….	3
Всего:	**34**

Примерные задания для зачета (итоговой контрольной работы)

Вариант – 1

№1. Для каждого значения a решите систему уравнений $\begin{cases} ax-3y=5, \\ 4x+y=2. \end{cases}$

№2. Для каждого значения a решите неравенство $2ax+5>a+10x$.

№3. Для каждого значения a решите уравнение $\dfrac{x^2-(3a-1)x+2a^2-2}{x^2-3x-4}=0$.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2-2(a-3)x+2a-6$ больше 48.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^2-(a-2)x-a+5=0$ больше 1.

№6. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x+3)^2+(|y|-7)^2=9, \\ (x-9)^2+(y-2)^2=a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x+(a-1)\sin x+0{,}5a-1=0$ имеет ровно семь корней на промежутке $\left[-\pi;\ \dfrac{13\pi}{6}\right)$.

№8. Для каждого a решите уравнение $3^{1+2|x-1|}+a^2+2a=(4a+6)\cdot 3^{|x-1|}$.

№9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(4ax-a-7)=2$ не имеет корней.

№10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x-75x+5$ имеет ровно один экстремум на промежутке (-5; 6].

Примерные задания для зачета (итоговой контрольной работы)

Вариант – 2

№1. Для каждого значения a решите систему уравнений $\begin{cases} ay+5x=7, \\ 3y-x=1. \end{cases}$

№2. Для каждого значения a решите неравенство $2ax+6<4x+3a$.

№3. Для каждого значения a решите уравнение $\dfrac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{x^2-6x+5}=0$.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2-ax+3+a$ меньше 29.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^2-(a+1)x+a+4$ меньше 2.

№6. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x+4)^2+(|y|-6)^2=16, \\ (x-8)^2+(y+1)^2=a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x-(4a-1)\cos x-2a+1=0$ имеет ровно шесть корней на промежутке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

№8. Для каждого a решите уравнение $2^{1+2|x+1|}+a^2-a=(3a-2)\cdot 2^{|x+1|}$.

№9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_{x-1}(4ax+a-9)=2$ имеет ровно два корня.

№10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x-108x+6$ имеет ровно один экстремум на промежутке [-8; 7).

Содержание

Кожухов Сергей Константинович
Уравнения и неравенства с параметром
Учебно-методическое пособие для учителей математики,
студентов математических специальностей
педагогических вузов, абитуриентов